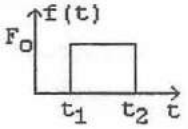


1)O comportamento vibratório do sistema com um grau de liberdade representado na figura é descrito pela equação: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)$.

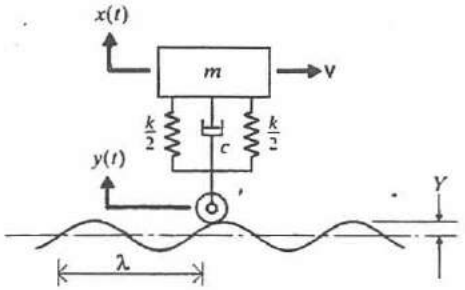
a) Definir frequência natural de vibração do sistema.

b) Definir frequência de ressonância de amplitude.



c) Considerando condições iniciais nulas, escrever a(s) expressão(s) da resposta x(t) do sistema para a solicitação representada na figura, em termos da função de solicitação f(t) e da função de resposta impulsiva h(t).

d) Representar graficamente a resposta x(t) do sistema à solicitação da alínea anterior, indicando eventuais pontos notáveis.



2) O equipamento representado na figura desloca-se com uma velocidade v sobre um piso ondulado de comprimento de onda λ.

a) Caracterizar o movimento vibratório do equipamento.

b) Representar a amplitude do movimento x(t) da massa m em função da velocidade de deslocamento. Indicar na figura eventuais pontos singulares.

c) Representar a amplitude F da força transmitida à massa m em função da velocidade de deslocamento. Indicar na figura eventuais pontos singulares.

d) Estabelecer uma expressão genérica para a resposta x(t) se, em vez da superfície ondulada, o sistema encontrar um degrau, isto é, $y(t)=-Y_0\mu(t)$.

3) Para estimar a frequência fundamental de vibração de um sistema, o quociente de Rayleigh constitui uma técnica bastante prática.

a) Indicar a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh.

b) Indicar quais os requisitos da aproximação da forma fundamental de vibração a utilizar no quociente de Rayleigh para :

i. um sistema linear discreto;

ii. um sistema contínuo em torção;

iii. um sistema contínuo em flexão.

c) Caracterizar, justificando, o quociente de Rayleigh dum sistema linear discreto para um vector arbitrado {v} que verifica a relação $\{v\}^T[m]\{u\}_1=0$, onde $[m]$ e $\{u\}_1$ representam, respectivamente, a matriz de massa e o primeiro vector modal.

4) A resposta {x(t)} de um sistema com 2 graus de liberdade a uma perturbação inicial $\{x(0)\}$ e $\{\dot{x}(0)\}$ é dada pela combinação linear das formas naturais de vibração $\{u\}_1$ e $\{u\}_2$ e pode escrever-se na forma:

$$\{x(t)\}=\{u\}_1\eta_1(t)+\{u\}_2\eta_2(t)$$
$$=c_1\{u\}_1\cos(\omega_1 t-\phi_1)+c_2\{u\}_2\cos(\omega_2 t-\phi_2)$$

onde $\eta_1(t)$ e $\eta_2(t)$ representam as coordenadas naturais.

Para um vector de deslocamentos iniciais $\{x(0)\}=\alpha\{u\}_2$ e um vector de velocidades $\{\dot{x}(0)\}=\{0\}$, demonstrar que a resposta do sistema é uma oscilação harmónica de frequência ω_2 e de configuração espacial $\{u\}_2$.

ext no: Definir a frequência natural de ... (1)

Wed R) Freq. de oscilação de um regime forçado? ?? amortec

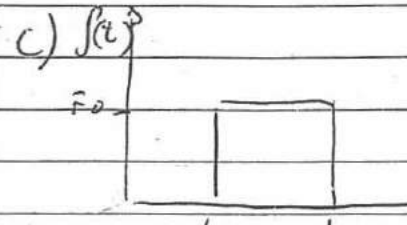
Teste 97/01/06

1) $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$

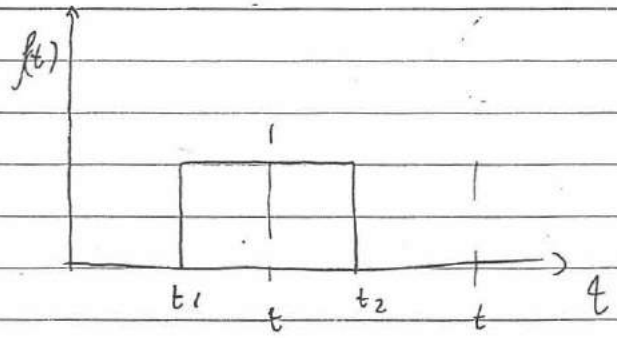
$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ sem amortec

a) Definir frequência natural de vibração do sistema
Frequência de oscilação de um regime livre

b) Definir frequência de ressonância de amplitude
É a frequência de oscilação para a qual o fator de amplificação é máximo

c) 

Considerando condições iniciais nulas escrever tendo em conta a expressão da resposta x(t) do sistema para a situação ref. na fig. em termos da função de solicitação f(t) e da função de resposta impulsiva h(t)



$0 < t < t_1 \Rightarrow x(t) = \int_0^{t_1} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$ (=0)

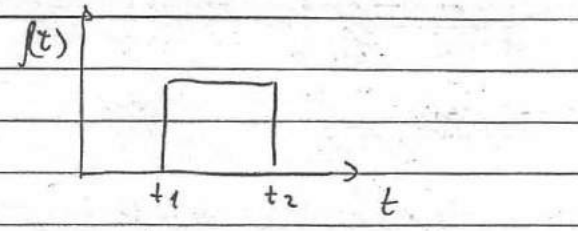
$t_1 < t < t_2 \Rightarrow x(t) = \int_0^{t_1} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$ (=0)

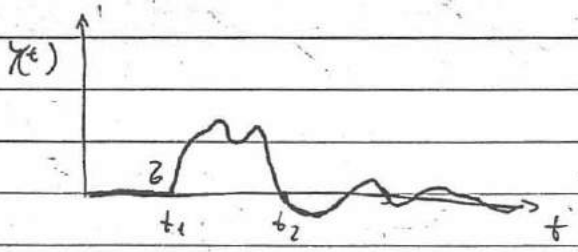
$t > t_2 \Rightarrow x(t) = \int_0^{t_1} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$ (=0)

$+ \int_{t_2}^{t} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

$= \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

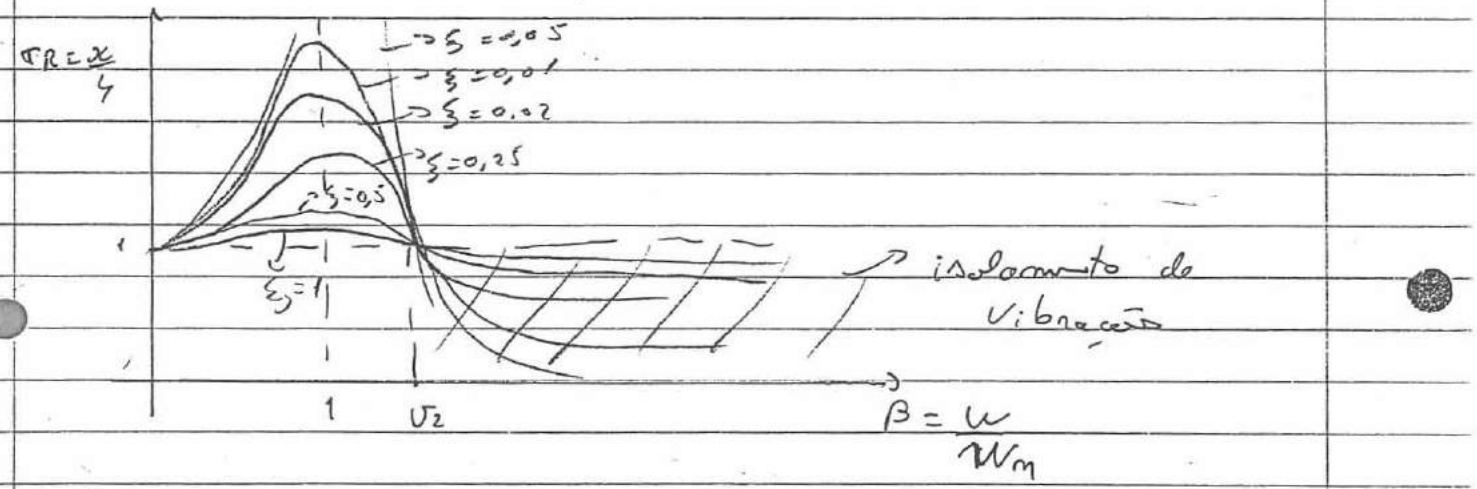
1d) Representar graficamente a resposta no $x(t)$ do sistema à solicitação do alínea anterior, indicando eventuais pontos mínimos



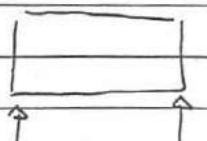


2·a) Caracterizar o mov. vibratório do equipamento
Mov. harmónico de base, transmissão passiva

b) $x(t) \rightarrow m$ Transmissibilidade absoluta



c) Representar a amplitude F da força transmitida à massa m em função da velocidade de deslocamento
Indicar na fig. eventuais pontos singulares.



$y = y_0 \cos \omega t$

$x = X \cos(\omega t - \phi)$

$\dot{x} = -X\omega \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$

$\ddot{x} = -X\omega^2 \cos(\omega t - \phi)$

$k(y-x) \quad c(\dot{y}-\dot{x})$

$F_{trans.} = k(y-x) + c(\dot{y}-\dot{x})$

$m\ddot{x} = k(y-x) + c(\dot{y}-\dot{x})$

cont. 2c

subst.

$$m\cdot(-X\omega^2\cos(\omega t-\phi)) = k(\zeta-x)+c(\dot{\zeta}-\dot{x})$$

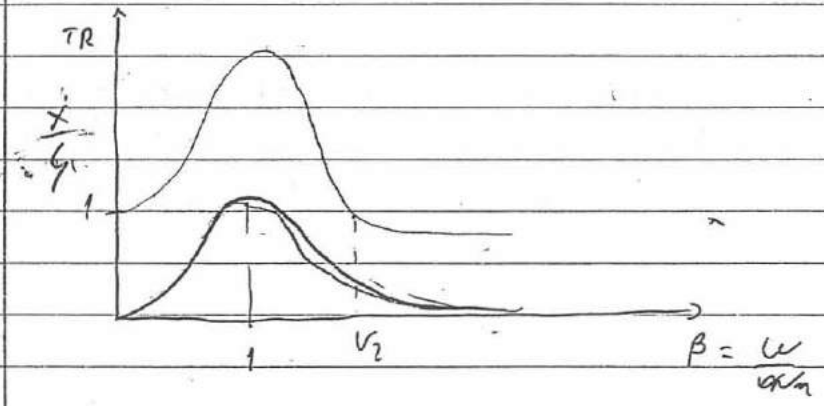
$$\Downarrow$$

$$FT$$

$$FT = -\underbrace{m X \omega^2}_{\text{Amplitude}}\cos(\omega t-\phi)$$

$$A_{F_b} = \frac{m X \omega^2}{m \bar{X} \bar{\omega}^2}$$

↳ termos "normal" so multiplicar por $X\omega^2$ obtemos uma expressão do tipo:



Pg. QRA 1/3

3a) Indicar as propriedades do quo. de Rayleigh.

1) O Q.R. possui valores estacionários na vizinhança dos vectores próprios do sistema

2) Para um vector $\{V\}$ que difere da forma natural $\{V\}_s$ de uma pequena quantidade de 1ª ordem, o Q.R. $R(\{V\})$ difere da freq. natural ω_s^2 associada de uma pequena quantidade de 2ª ordem

3) O Q.R. possui um valor estacionário na vizinhança das formas naturais sendo os valores estacionários as freq. naturais correspondentes

4) Na vizinhança do modo fundamental $(\omega_1^2; \{V\}_1)$ o QR apresenta igualmente um valor mínimo

→

3b) i) Sistema linear discreto
1) vector ñ nulo
2) nº de componentes = grau de liberdade

ii) Sistema contínuo em tracção
1) verificar as condições de fronteira geométricas
2) ser derivável uma vez

iii) sistema contínuo em flexão
1) verificar as condições de fronteira geométricas
2) ser derivável (pelo menos) duas vezes

3c) Caracterizar, justificando, o QR dum sistema linear discreto para um valor arbitrário $\{v\}$ que verifica a relação $\{v\}^T [m] \{v\}_1 = 0$

onde $[m]$ e $\{v\}_1$ apresentam respectivamente, a matriz de massa e o primeiro vector modal

??

Quando $\{v\}^T [m] \{v\}_1 = 0$ o quociente de Rayleigh dá-nos uma estimativa ñ do 1º frequência natural ω_2 mas sim do 2º freq. natural ω_2, sendo $\{v\}_1$ o primeiro vector modal

4) $x(t) = c_1 \{v\}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + c_2 \{v\}_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$

1ª condição $\{x(0)\} = \alpha \{v\}_2$

$c_1 v_1 \cos(-\phi_1) + c_2 v_2 \cos(-\phi_2) = \alpha v_2$

$c_1 v_1 \cos\phi_1 + c_2 v_2 \cos\phi_2 = \alpha v_2$ ← função ran

2ª condição $\{\dot{x}(0)\} = \{0\}$

$\dot{x}(t) = -c_1 v_1 \omega_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t - \phi_1) - c_2 v_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t - \phi_2)$

$-c_1 v_1 \omega_1 \operatorname{sen}(-\phi_1) - c_2 v_2 \omega_2 \operatorname{sen}(-\phi_2) = 0$

$c_1 v_1 \omega_1 \operatorname{sen}(\phi_1) + c_2 v_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\phi_2) = 0$ ← função impl

cont. 4

1° cond. ⊗ U_1^T

$$C_1 \cancel{U_1 U_1^T} \cos\phi_1 + C_2 U_2 U_1^T \cos\phi_2 = \alpha U_2 U_1^T$$

$$\| \qquad\qquad ①$$

$$\boxed{C_2 \cos\phi_2 = \alpha \cancel{\phi_2}}$$

2° cond. ⊗ U_1^T

$$\boxed{C_2 \omega_2 \operatorname{sen}\phi_2 = 0}$$

dividindo temos que:

$$\frac{C_2 \omega_2 \operatorname{sen}\phi_2}{C_2 \cos\phi_2} = 0 \Rightarrow \omega_2 \operatorname{tag}\phi_2 = 0 \qquad \omega_2 \neq 0$$

$$\operatorname{tag}\phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = 0$$

$$\boxed{\phi_2 = 0 \quad \wedge \quad C_2 = 0}$$

1° cond. ⊗ U_2^T

$$C_1 U_1 U_2^T \cos\phi_1 + C_2 \cancel{U_2 U_2^T} \cos\phi_2 = \alpha \cancel{U_2 U_2^T}$$

$$C_1 \cos\phi_1 = 0$$

2° cond ⊗ U_2^T

$$\omega_1 C_1 U_1 U_2^T \operatorname{sen}(\phi_1) + C_2 \cancel{U_2 U_2^T} - - - = 0$$

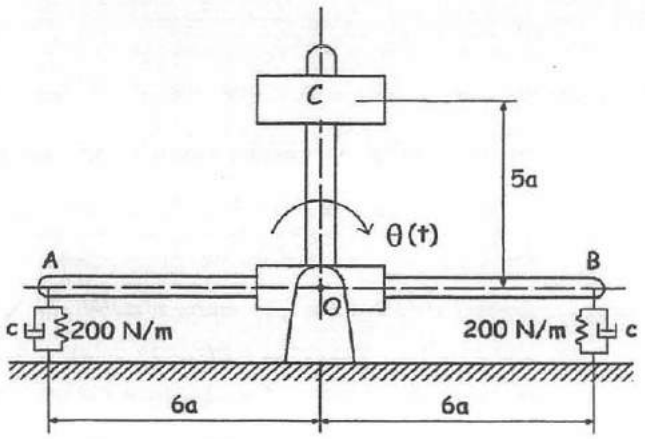
$$C_1 \omega_1 \operatorname{sen}(\phi_1) = 0$$

$$\boxed{\phi_1 = 0 \quad \wedge \quad C_1 = 0}$$

$$\boxed{\phi_2 = 0 \quad \wedge \quad C_2 = 0}$$

Apartir destas condições temos que chega à equação que queremos provar

$$|x(t)| = |U_1 \eta_1(t) + |U_2 \eta_2(t)|$$



1) O pêndulo representado na figura oscila em torno do ponto O, sendo o seu movimento controlado por dois conjuntos mola amortecedor. Num ensaio em regime livre, foram lidos os seguintes valores consecutivos para o deslocamento angular máximo em torno da posição de equilíbrio estático: 10°, -7°, 4.9°, -3.4°. Considerando uma massa concentrada de dimensões desprezáveis colocada em C e desprezando a massa do pêndulo, estabelecer:

m = 3 kg
C

a) a equação diferencial do movimento.

Para a= 0.04 m, determinar:

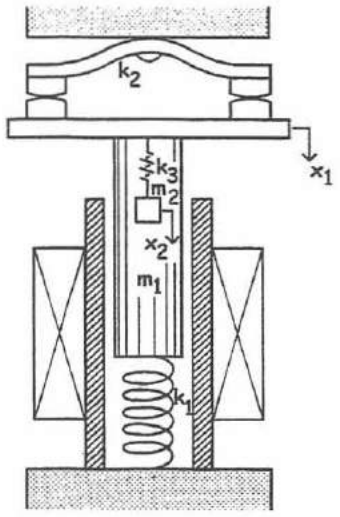
b) a frequência angular natural não amortecida ω_n;

c) a razão de amortecimento ξ;

d) o valor da constante c de cada amortecedor;

e) o período de vibração amortecida T_d;

f) Admitindo uma perturbação inicial $\dot{\theta}_0 = 10$ rad / s , determinar o instante em que o sistema passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio estático.



2) A figura representa um relé electro-magnético constituído por um núcleo de massa m_1=24 g e suportado numa extremidade por uma mola elástica de rigidez k_1=3000 N/m e na outra extremidade por uma lâmina metálica elástica de rigidez k_2=1200N/m.

O campo eléctrico origina uma força pulsante de amplitude igual a 1.3 N e frequência de 50 Hz.

Um absorsor dinâmico constituído pela massa m_2 e mola de rigidez k_3 e cuja massa é igual a $\frac{m_1}{10}$ é acoplado ao sistema de modo que a mais baixa frequência natural seja igual a 40 Hz.

Determinar:

a) a amplitude de resposta da massa m_1 antes da montagem do absorsor.

b) a energia cinética do sistema;

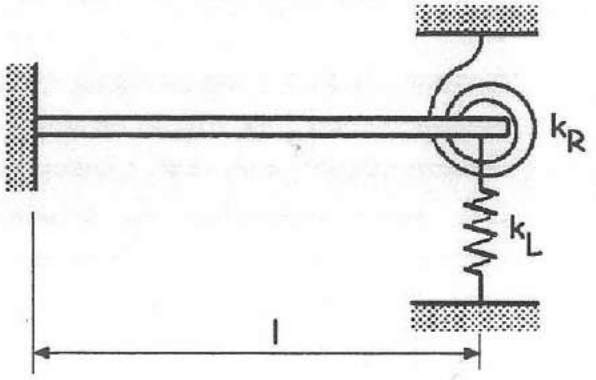
c) a energia potencial do sistema;

d) as equações do movimento do sistema na forma matricial;

e) A rigidez k_3 da mola do absorsor;

f) as frequências naturais ω_1 e ω_2 do sistema;

g) as amplitudes de resposta das massas m_1 e m_2;



3) Uma viga de comprimento l, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, está encastrada na extremidade esquerda e apoiada sobre molas elásticas lineares de translação e de rotação de rigidez, respectivamente, k_L e k_R, na extremidade direita, conforme se representa na figura.

a) Escrever as condições de fronteira do sistema.

b) Estudar, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = ax^2 + bx + c$ como aproximação da forma fundamental de vibração no método da energia de Rayleigh.

c) Determinar as energias potencial e cinética máximas do sistema.

d) Determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

e) Discutir a aplicabilidade da função de aproximação proposta para os seguintes valores limite da rigidez:

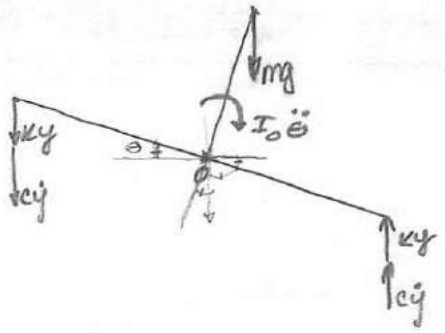
i) $k_L \to 0$ e $k_R \to 0$
ii) $k_L \to 0$ e $k_R \to \infty$
iii) $k_L \to \infty$ e $k_R \to 0$
iv) $k_L \to \infty$ e $k_R \to \infty$.

f) Determinar o valor aproximado da frequência fundamental de vibração da viga quando k_L=0 e k_R=0, e comparar com o correspondente valor exacto.

1.

Exame
97.01.06.

a) Equação diferencial do movimento



$y = 6a \operatorname{sen}\theta$

$\dot{y} = 6a \cos\theta\, \dot{\theta}$

Para pequenas oscilações

$\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

$\cos\theta \simeq 1$

$\Sigma \vec{M_O} = -I_O \ddot{\theta} \Leftrightarrow 2 \times Ky \times 6a + 2 \times c\dot{y} \times 6a - mg \times 5a \times \operatorname{sen}\theta = -I_O \ddot{\theta}$

$\Leftrightarrow 2k(6a\theta) \times 6a + 2c \times (6a\dot{\theta}) \times 6a - mg\,5a\theta = -I_O \ddot{\theta}$

$\Leftrightarrow 72ka^2\theta + 72ca^2\dot{\theta} - 5amg\theta + I_O\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I_O\ddot{\theta} + 72ca^2\dot{\theta} + (72ka^2 - 5amg)\theta = 0 \Leftrightarrow$

b) $a = 0.04\,m$

$\omega_m = ?$

$c_c = 2 m_{eq} \omega_m \Leftrightarrow \omega_m = \frac{c_c}{2 m_{eq}}$

$c_c = 2\sqrt{k_{eq} \cdot m_{eq}}$

$m_{eq} = I_O \Leftrightarrow I_O = I_{O_c} + I_{O_{pendulo}} \Leftrightarrow I_O = I_c + m_c (5a)^2 \Leftrightarrow I_O = 3 \times 25 \times 0.04^2$

(dimensões desprezáveis)

(despreza-se a massa do pêndulo)

$I_{Oc} = I_c + m_c d^2$

$m_{eq} = I_O = 0,12\ Kg$

$k_{eq} = 72ka^2 - 5amg \Leftrightarrow k_{eq} = 72 \times 100 \times 0.04^2 - 5 \times 0.04 \times 3 \times 9,8 \Leftrightarrow k_{eq} = 17,16\ N/m$

$c_c = 2\sqrt{k_{eq} \cdot m_{eq}} \Leftrightarrow c_c = 2 \times 1,435 \Leftrightarrow c_c = 2,87\ Ns/m$

$\omega_m = \frac{c_c}{2 m_{eq}} \Leftrightarrow \omega_m = \frac{2.87}{2 \times 0.12} \Leftrightarrow \omega_m = 11.96\ rad/s$

c) $\xi = ?$

$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{10}{4.9} = 0,7$

$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = \frac{0,7}{6.32} = 0,1107$

d) $c = ?$

$c_{eq} = \xi c_c \Leftrightarrow c_{eq} = 0.1107 \times 2.87 \Leftrightarrow c_{eq} = 0.3177$ Ns/m

$c_{eq} = 72a^2 c \Leftrightarrow c = \frac{0.3177}{72 \times 0.042} \Leftrightarrow c = 2.758$ Ns/m

e) $T_d = ?$

$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \Leftrightarrow \omega_d = 11.96 \sqrt{1-0.1107^2} \Leftrightarrow \omega_d = 11.88$ rad/s

$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \Leftrightarrow T_d = 0.53$ s

f) $\dot{\theta}_0 = 10$ rad/s

$t = ?$ quando o sistema passa pela 1ª vez pela posição de eq. estática

$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} A \cdot \cos(\omega_d t - \phi)$ $\quad \theta_0 = x_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = v_0 = 10$ rad/s

$A = \sqrt{\left(\frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}\right)^2 + x_0^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{11.96\sqrt{1-0.1107^2}}\right)^2} = 0.84$ m

$\phi = tg^{-1} \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d x x_0} = tg^{-1} \infty = \frac{\pi}{2}$

$x(t) = e^{-1.324 t} \times 0.84 \cos\left(11.88 t - \frac{\pi}{2}\right)$

$x(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(11.88 t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 11.88 t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 0.264$ s

2. $\begin{cases} m_1 = 24g \\ K_1 = 3000 \text{ N/m} \\ K_2 = 1200 \text{ N/m} \end{cases}$ Amplitude da Força $= F = 1.3$ N

$f = 50$ Hz $\Rightarrow \omega = 2\pi f \Leftrightarrow \omega = 2\pi 50 \Leftrightarrow \omega = 314.16$ rad/s

Absorsor: $\begin{cases} m_2 = \frac{m_1}{10} \\ K_3 \end{cases}$

A mais baixa frequência natural = 40Hz $\Rightarrow \omega_1 = 2\pi 40 = 251$ rad/s

a) Amplitude de resposta da massa m_1 antes da montagem do absorsor.

$X(\omega) = \frac{X_s}{|1-\beta^2|}$, $X_s = \frac{F}{K_t}$, $K_t = K_1 + K_2 = 4200$ N/m

$X_s = \frac{1.3}{4200} = 3.095 \times 10^{-5}$ m

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_m}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K}{m_1}} = \sqrt{\frac{4200}{24\times10^{-3}}} = 418{,}3 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \frac{314.16}{418.3} = 0.75$$

$$X(\omega) = \frac{3{,}095\times10^{-5}}{|1-0{,}75^2|} = 7.07\times10^{-3}\ m$$

b) Energia cinética do sistema

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

c) Energia potencial

$$U = U_{k_1} + U_{k_2} + U_{k_3} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_1^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_1 - x_2)^2$$

d) Eq. movimento na forma matricial.

Usando o formalismo de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \overline{Q_i}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_1^2 - \frac{1}{2} k_3 (x_1 - x_2)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1 - k_2 x_1 - k_3 (x_1 - x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = k_3 (x_1 - x_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_1 \dot{x}_1\right) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_2 \dot{x}_2\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \overline{Q_i} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 x_1 + k_3 (x_1 - x_2) = 1{,}3 \cos(314{,}16 t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_3 (x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3\cos(314.16t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e) $k_3 = ?$ $\quad \omega_s = \sqrt{\frac{k_3}{m_2}} \quad \alpha = \frac{\omega_s}{\omega_m} \quad \omega_m = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 418{,}3$ rad/s

$$\beta^4 - (\alpha^2 + \varepsilon\alpha^2 + 1)\beta^2 + \alpha^2 = 0$$

$$\beta = \frac{\omega_1}{\omega_n} \Leftrightarrow \beta = \frac{251}{418,3} \Leftrightarrow \beta = 0.6$$

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1} = \frac{24\times10^{-4}}{24\times10^{-3}} = 10^{-1}$$

$$0.6^4 - (\alpha^2 + 0.1\alpha^2 + 1)\,0.6^2 + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow 0.1296 - 0.36\alpha^2 - 0.036\alpha^2 - 0.36 + \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0.604\alpha^2 = 0.2304 \Leftrightarrow \alpha = 0.6176$$

$$\alpha = \frac{\omega_s}{\omega_n} \Leftrightarrow \omega_s = 0.6176 \times 418,3 \Leftrightarrow \omega_s = 258.34 \text{ rad/s}$$

$$K_3 = \omega_s^2 \times m_2 \Leftrightarrow K_3 = 258,34^2 \times 24\times10^{-4} \Leftrightarrow K_3 = 160,17 \text{ N/m}$$

f) $\omega_1 = ?$ $\omega_2 = ?$

$\omega_1 = 251$ rad/s

$$|[K] - \omega^2[m]| = 0$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 4360,17 & -160,17 \\ -160,17 & 160,17 \end{bmatrix} \qquad [m] = \begin{bmatrix} 24\times10^{-3} & 0 \\ 0 & 24\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$[K] - \omega^2[m] = \begin{bmatrix} 4360,17 - 24\times10^{-3}\omega^2 & -160,17 \\ -160,17 & 160,17 - 24\times10^{-4}\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$|[K] - \omega^2[m]| = 0 \Leftrightarrow (4360.17 - 24\times10^{-3}\omega^2)(160,17 - 24\times10^{-4}\omega^2) - 160,17^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 698368.43 - 10.46\omega^2 - 3,844\omega^2 + 0.000057\omega^4 - 25654,43 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = 185308 \text{ V } \omega^2 = 63025 \Leftrightarrow \omega_2 = 430,47 \text{ V } \omega_1 = 251.047$$

g) As amplitudes de resposta das massas m_1 e m_2

$$X_1(\omega) = \frac{(K_3 - \omega^2 m_2)F}{((K + K_3) - \omega^2 m_1)(K_3 - \omega^2 m_2) - (K_3)^2} = \frac{-99.712}{-178902.15} = 5.59\times10^{-4} \text{ m}$$

$$X_2(\omega) = \frac{K_3 F}{-178402.25} = -1.167\times10^{-3} \text{ m}$$

3.

a) Condições Fronteiras. (Flexão)

$x=0$: $w(0,t)=0$

$\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0$

$x=l$: $\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=K_L\, w(l,t)$

$M_f = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t)=K_R\frac{\partial w}{\partial R}$

b) $V(x)=ax^2+bx+c$

Para se analisar a aplicabilidade da função só se usam as condições Geométricas.

$x=0$: $w(0,t)=0$

$\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0$

$V(0)=a\times 0+b\times 0+c=0 \Rightarrow c=0$

$\frac{\partial V}{\partial x}(0)=2a\times 0+b=0 \Rightarrow b=0$

c) Energia cinética e potencial máxima.

$T_{max}=T_{max_V}=\omega^2\frac{1}{2}\int_0^l \rho A(x)V^2(x)dx$

$U_{max}=U_V+U_{K_L}+U_{K_R}$

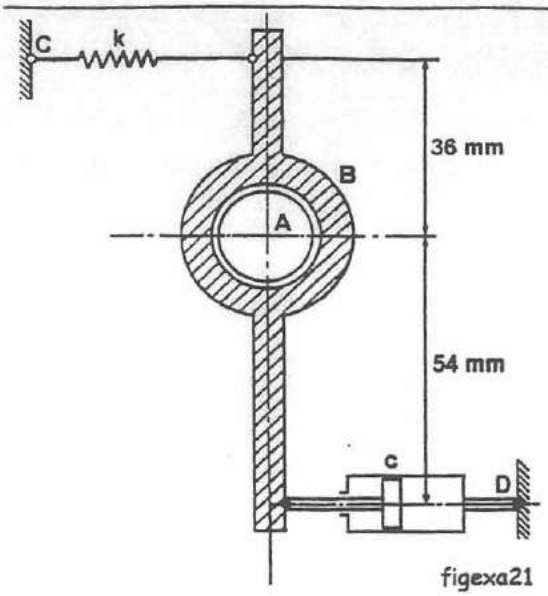
$U_V=\frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\left[\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right]^2 dx$

$U_{K_L}=\frac{1}{2}K_L\left(\frac{dV(l)}{dx}\right)^2$

$U_{K_R}=\frac{1}{2}K_R\left(\frac{dV(l)}{dx}\right)^2$

d) Estimativa da frequência fundamental de vibração.

$\omega^2=\frac{U_{max}}{T^*}$, $T^*=\frac{T_{max}}{\omega^2}=\frac{1}{2}\int_0^l \rho A(x)V^2(x)dx$



figexa21

1) O corpo representado na figura oscila em torno do ponto A, sendo o seu movimento controlado por uma mola linear de rigidez k e um amortecedor viscoso de constante c.
Num ensaio em regime livre, o sistema responde com uma vibração livre amortecida de frequência igual a 2 Hz, medindo-se os seguintes valores da vibração:

- 1ª oscilação: $\theta_1 = 10°$.
- 3ª oscilação: $\theta_2 = 0.62°$.

Sabendo que a rigidez da mola é de 126 N/m, determinar:

a) o decremento logarítmico δ e a razão de amortecimento ξ;

b) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

c) o momento de inércia I_O do corpo em relação ao eixo que passa pelo ponto A;

d) o valor da constante c do amortecedor;

Admitindo que o sistema é excitado por um momento aplicado em A, $M_A = M_m \cos\omega t$, com $M_m = 0.1$ Nm, determinar:

e) a frequência de excitação ω para a qual a amplitude de resposta é de $\Theta(\omega) = 5°$.

f) a reacção no apoio A.

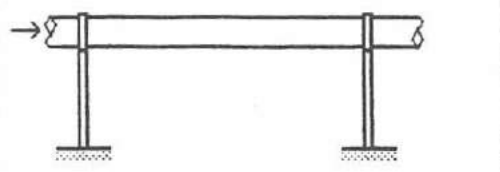


Figura 1

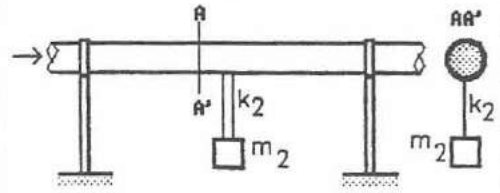
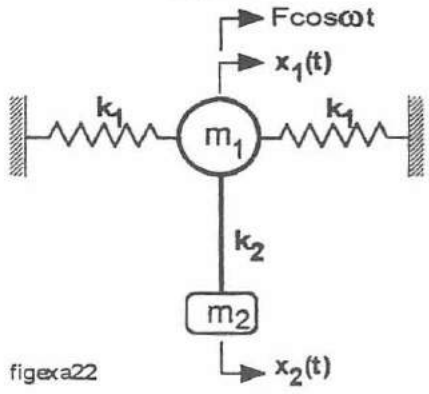


Figura 2



figexa22
Figura 3

2) Numa instalação de indústria química, uma bomba alimenta uma tubagem comprida como se mostra na figura 1. Quando a velocidade de rotação da bomba é de 356 rpm, as pulsações do fluido enviado para a tubagem coincidem com a frequência natural de vibração lateral da secção da tubagem.
Para resolver o problema fixou-se ao tubo uma massa adicional de 50 Kg através de uma viga encastrada, como se mostra na figura 2. Nestas circunstâncias o sistema é equivalente ao modelo representado na figura 3. Determinar:

a) A energia cinética do sistema.

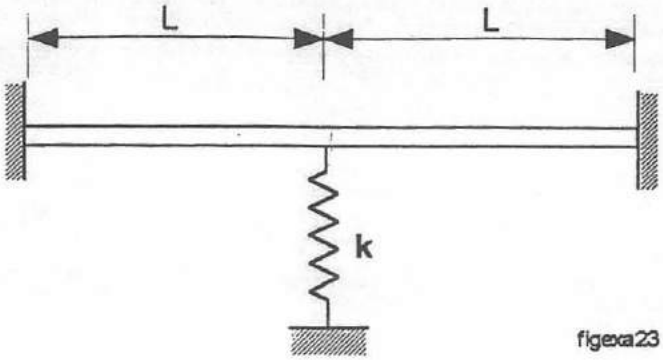
b) A energia potencial do sistema.

c) As equações de movimento do sistema na forma matricial.

d) A rigidez da viga k_2 e a massa da tubagem m_1 para que as duas frequências naturais do sistema tenham os valores de $\omega_1 = 32.38$ rad/s e $\omega_2 = 42.91$ rad/s.

e) Os valores da massa adicional m_2 e da rigidez da viga k_2 para que as duas frequências naturais do sistema sejam mais separadas e tenham os valores de $\omega_1 = 26.2$ rad/s e $\omega_2 = 52.4$ rad/s.

f) Justifique o eventual interesse dos valores de ω_1 e ω_2 estarem mais afastados.



figexa23

3) Uma viga de comprimento 2L, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, está encastrada em ambas as extremidades e possui, a meio vão, uma mola elástica de rigidez k, conforme se representa na figura.

Pelo método da energia de Rayleigh, e utilizando como aproximação da forma fundamental de vibração a função $V(x) = \delta\left(\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) - 1\right)$,

a) Esboçar a função $V(x)$ e verificar, justificando, a aplicabilidade desta aproximação ao problema.

b) Determinar a energia potencial máxima, U_{max}, e a energia cinética máxima, T_{max}.

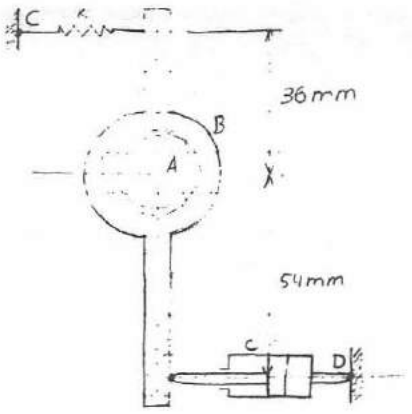
c) Determinar a estimativa da frequência fundamental de vibração, ω_a. Comentar o resultado.

d) Discutir a validade do resultado para os valores limite da rigidez K ($k \to 0$ e $k \to \infty$).

e) Determinar a frequência fundamental exacta para os valores limite da rigidez K ($k \to 0$ e $k \to \infty$).

Vibrações mecânicas - 96.01.30

1)



$f_d = 2Hz$

1ª oscilação: $\theta_1 = 0,1745\ rad$

3ª oscilação: $\theta_2 = 0,5\% = 1,0821 \times 10^{-2}\ rad$

$k = 126\ N/m$

a) Decremento logarítmico (δ) e razão de amortecimento (ζ):

$$\delta = \frac{1}{k} \ln \frac{x(t)}{x(t+kT)} = \frac{1}{2} \ln \frac{0,1745}{0,010821} = 1,39$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = \frac{1,39}{\sqrt{(2\pi)^2 + 1,39^2}} = 0,216$$

b) Frequência angular não amortecida (ω_n):

$$\omega_d = 2\pi f = 2\pi \times 2 = 12,566\ rad/s$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{12,566}{\sqrt{1-0,216^2}} \Leftrightarrow \omega_n = 12,87\ rad/s$$

c) Momento de inércia (I_0):

$$I_0 = m_{eq} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow \omega_n^2 = \frac{k_{eq}}{m_{eq}}$$

$$\Rightarrow m_{eq} = \frac{k_{eq}}{\omega_n^2} = \frac{126 \times 0,036}{12,87^2} \Rightarrow I_0 = m_{eq} = 0,0274\ kg/m^2$$

d) Constante de amortecimento (C):

$$\zeta = \frac{C_{eq}}{C_{CR}}$$

$$C_{CR} = 2 \cdot \sqrt{k_{eq} m_{eq}} = 2 \cdot \sqrt{2 \times 0,036 \times 0,0274} = 0,0888$$

$$C_{eq} = \zeta \times C_{CR} = 0,216 \times 0,0888 = 0,0192\ Ns/m$$

$$C_{eq} = 0,054\ C \Rightarrow C = \frac{0,0192}{0,054} \Rightarrow C = 0,355\ Ns/m$$

e) Frequência de excitação (ω)

$M_A = 0,1 \cos \omega t$

Amplitude de resposta: $\theta(\omega) = 5° = 0,0873$ rad

$$\theta(\omega) = \frac{M}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \Rightarrow 0,0873 = \frac{0,1}{126} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\times 0,216\,\beta)^2}}$$

$$\Rightarrow 0,0873 = \frac{0,0008}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (0,432\,\beta)^2}} \Rightarrow \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (0,432\,\beta)^2} = 9,1\times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow 1 - 2\beta^2 + \beta^4 + 0,186624\,\beta^2 = 8,4\times 10^{-5} \Rightarrow \beta = 0,951$$

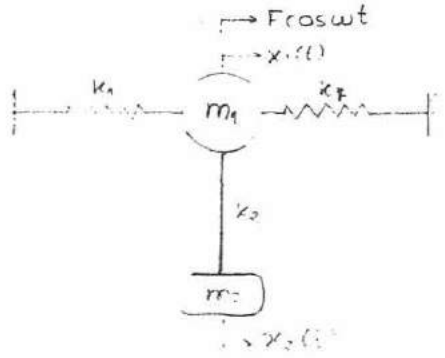
$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \omega = 0,951 \times 12,87 \Rightarrow \omega = 12,24 \text{ rad/s}$$

f) Reacção no apoio A (R_A):

$R_A = -M_T$

$$M_T = M \frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} = 0,1 \frac{\sqrt{1+(2\times 0,216\times 0,951)^2}}{\sqrt{(1-0,951)^2+(2\times 0,216\times 0,951)^2}} = 0,2613 \text{ N}$$

2)



$\omega = 350$ rpm $= \frac{350\times 2\pi}{60} = 36,65$ rad/s

$m_2 = 50$ kg

a) Energia cinética (T):

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

b) Energia potencial (V):

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 = k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2$$

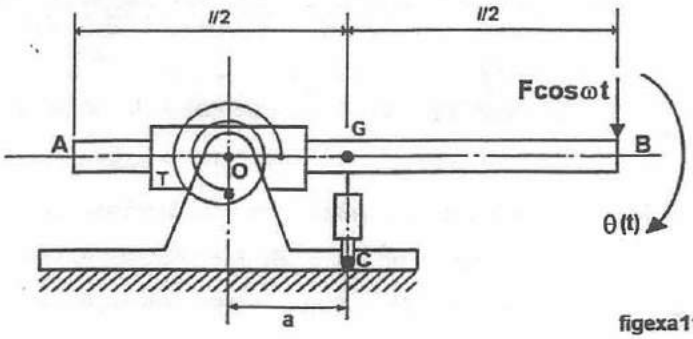
c) Equações do movimento:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = +k_2 (x_1 - x_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2 \qquad \bar{Q}_1 = F\cos\omega t$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \bar{Q}_i \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + 2k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F\cos\omega t \\ m_2 \ddot{x}_1 - k_2 (x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$



figexa11

1) Para o sistema representado na figura, a vibração livre amortecida apresenta um período T=1.3 s e fornece as seguintes leituras para deslocamentos angulares sucessivos em torno da posição de equilíbrio estático para a qual θ=30° : 69.829°, 2.209°, 49.391°, 16.469°, 39.441°. A mola possui uma rigidez angular K=2 Nm/rad, a distância a é igual a 0.12 m e o comprimento l vale 0.5 m.

Determinar:

a) a razão de amortecimento ξ;
b) a frequência natural não amortecida ω_n;
c) o momento de inércia I_O do sistema em relação a um eixo que passa pelo ponto O;
d) o valor da constante c do amortecedor;
e) a frequência de excitação ω e respectiva amplitude Θ(ω), de modo que o desfasamento φ entre a excitação e a resposta seja de 135°;
f) a força $f_c(t)$ transmitida pelo amortecedor ao apoio C.

2) O sistema vibratório representado na figura é constituído por duas polias ligadas entre si e a uma massa m por um arranjo de cabos e molas. A posição da massa m é referenciada pela coordenada linear y(t) e a posição das polias é referenciada pela coordenadas angulares α(t) e θ(t). As coordenadas são referidas à posição de equilíbrio estático do sistema. Os momentos de inércia das polias em relação ao seu eixo de rotação são respectivamente I_1 e I_2. O atrito entre as polias e o cabo é suficiente para que não ocorra escorregamento.

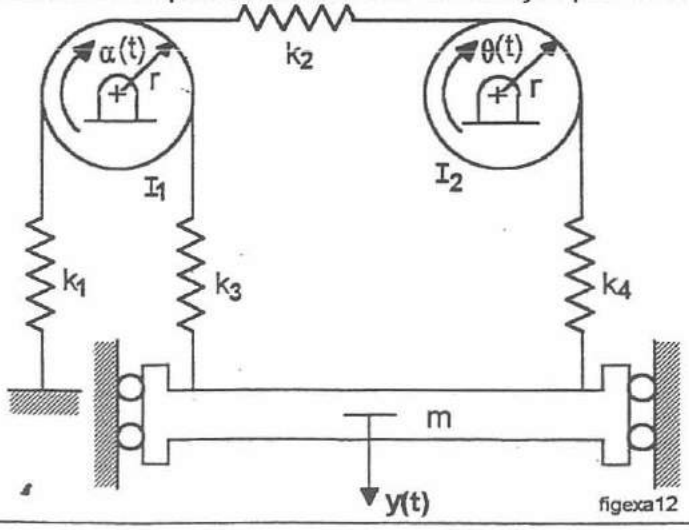
Determinar:

a) a energia cinética do sistema;
b) a energia potencial do sistema;
c) as equações do movimento do sistema na forma matricial;
d) as matrizes de massa e de rigidez para os seguintes valores numéricos:

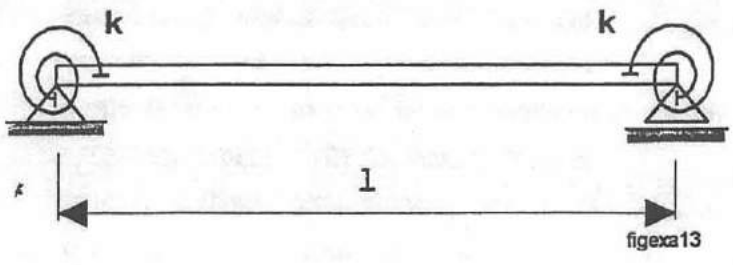
$I_1=I_2=0.2$ kgm^2 r=0.15 m m=30 kg

$k_1=k_3=k_4=3000$ N/m $k_2=6000$ N/m

e) Arbitrar uma aproximação da forma fundamental de vibração do sistema. Justificar.
f) Determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração pelo método de Rayleigh.



figexa12



figexa13

3) Uma viga de comprimento l, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, está apoiada sobre dois apoios simples com molas elásticas de rigidez angular k, conforme se representa na figura.

a) Escrever as condições de fronteira do sistema.

Pelo método da energia de Rayleigh, e considerando como aproximação da forma fundamental de vibração a forma fundamental exacta de uma viga simplesmente apoiada (sem molas),

b) verificar, justificando, a aplicabilidade desta aproximação ao problema;

c) determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração;

d) comentar e discutir o resultado para os valores limite da rigidez K ($k \to 0$ e $k \to \infty$).

e) Estabelecer uma aproximação para a forma fundamental dada pela sobreposição da forma fundamental exacta da viga simplesmente apoiada (sem molas) e da deformada provocada pelas molas.

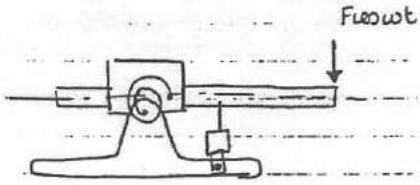
Deformada provocada pelas molas ⇒

Força desenvolvida pelas molas: $F_k = k \cdot v(x)$

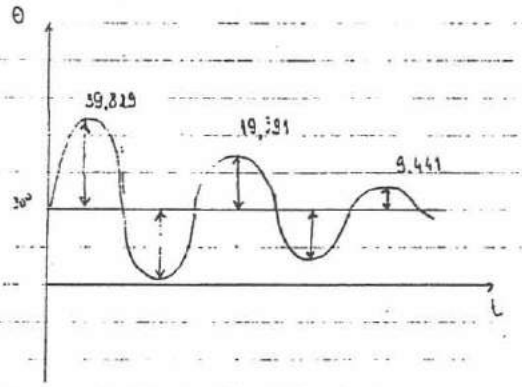
135 – 180

3.01.96 Teste PARTE PRÁTICA

1.



a)



Decremento logarítmico: $\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{39,829}{19,391} = 0,720$

ou

$\delta = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_3} = 0,5 \cdot \ln \frac{39,829}{9,441} = 0,720$

Razão de amortecimento: $\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0,72}{\sqrt{4\pi^2 + 0,72^2}} = 0,114$

b)

Frequência natural amortecida: $\omega_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,3} = 4,83 \text{ rad/s}$

Frequência natural não amortecida: $\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{4,83}{\sqrt{1-0,114^2}} = 4,86 \text{ rad/s}$

c)

Momento de inércia Io: $I_0 = \frac{K_t}{\omega_n^2} = \frac{2}{4,86^2} = 0,0845 \text{ Kgm}^2$

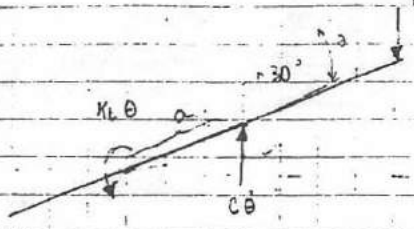
d)

$C_t = \xi \cdot C_c = \xi \cdot \sqrt{2 K_t I_0} = 0,114 \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 0,0845} = 0,066 \text{ N.m/rad}$

$C_t = a^2 \cos 30° \, c \Rightarrow c = \frac{0,066}{0,12^2 \cdot \cos 30°} = 5,3 \text{ kg/s}$

c) Frequência de excitação ω e a sua amplitude $\theta(\omega)$.

Equação de movimento do sistema:



$y = a\,\mathrm{sen}(30° - \theta)$

$\dot{y} = -a\dot{\theta}\cos(30° - \theta)$

para pequenas oscilações $\dot{y} = -a\dot{\theta}\cos 30°$

$C\dot{y} = a\dot{\theta}\cos 30°$

C_T

$\sum \vec{M_O} = -I_0\ddot{\theta} \Rightarrow -I_0\ddot{\theta} = -a^2\cos 30°\, C\,\dot{\theta} - K_t\theta - \left(\frac{l}{2} + a\right) \cdot F\cos\omega t \cdot \cos 30°$

$I_0\ddot{\theta} - C_T\dot{\theta} + K_t\theta = \left(\frac{l}{2} + a\right)\cos 30° \cdot F\cos\omega t$

$0{,}0845\ddot{\theta} + 0{,}066\dot{\theta} + 2\theta = 0{,}32\,F\cos\omega t$

$\Rightarrow \boxed{0{,}264\ddot{\theta} + 0{,}206\dot{\theta} + 6{,}25\theta = F\cos\omega t}$

Resposta permanente do sistema: $\boxed{\theta_p(t) = \theta(\omega)\cdot\cos(\omega t - \phi)}$

$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{2\beta\theta}{1-\beta^2} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,135° = \frac{2\cdot 0{,}111\cdot\beta}{1-\beta^2}$

$\Leftrightarrow -1 + \beta^2 = 0{,}228\beta$

$\Leftrightarrow \beta^2 - 0{,}228\beta - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 1{,}12}$

Frequência de excitação do sistema: $\omega = \beta\cdot\omega_n = 1{,}12\cdot 4{,}86 = 5{,}44$ rad/s

Para $t = \frac{T}{4} = \frac{1{,}3}{4} = 0{,}325 \Rightarrow \theta = 69{,}829° = 1{,}219$ rad

Resposta total do sistema:

$\theta(t) = e^{-\zeta\omega_n t} A\cos(\omega_d t - \phi_1) + \theta(\omega)\cos(\omega t - \phi_2)$ com $A = \sqrt{0{,}524^2 + 0{,}106^2} = 0{,}527$

$\phi_1 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{0{,}106}{0{,}524}\right) = 0{,}114$

$\theta(t) = e^{-2{,}554 t}\cdot 0{,}527\cos(4{,}29t - \ldots) + \theta(\omega)\cos\left(5{,}44t - \frac{3\pi}{4}\right)$

$1{,}219 = e^{-0{,}554\cdot 0{,}325}\cdot 0{,}527\cos(4{,}33\cdot 0{,}325 - 0{,}114) + \theta(\omega)\cdot\cos(5{,}44\cdot 0{,}325 - 2{,}356)$

$\Rightarrow \boxed{\theta(\omega) = 1{,}35}$

f)

Força transmitida pelo amortecedor:

$$f_c(t) = -\omega c_r \cdot \theta(\omega) \cdot \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$f_c(t) = -5{,}44 \cdot 0{,}066 \cdot 1{,}35 \cdot \operatorname{sen}\left(5{,}44\,t - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{f_c(t) = -0{,}484 \cdot \operatorname{sen}\left(5{,}44\,t - \frac{3\pi}{4}\right)}$$

$180^\circ - \pi$

$135^\circ - x$

$\frac{135\pi}{180} = \frac{27\pi}{36} = \frac{3\pi}{4}$

2.

a)

Energia cinética do sistema:

$$T_{sist} = T_1 + T_2 + T_m = \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

b)

Energia potencial do sistema:

$$U_{sist} = U_{K_1} + U_{K_2} + U_{K_3} + U_{K_4} =$$

$$= \frac{1}{2} K_1 (\alpha r)^2 + \frac{1}{2} K_2 r^2 (\alpha - \theta)^2 + \frac{1}{2} K_3 (y - \alpha r)^2 + \frac{1}{2} K_4 (y - \theta r)^2$$

c)

Usando o formalismo de Lagrange:

[a] $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) = I_1 \ddot{\alpha}$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = K_1 r^2 \alpha + K_2 r^2 (\alpha - \theta) - K_3 r (y - \alpha r) = (K_1 r^2 + K_3 r^2)\alpha - K_2 r^2 \theta - K_3 r y$$

[b] $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = I_2 \ddot{\theta}$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -K_2 r^2 (\alpha - \theta) - K_4 r (y - \theta r) = -K_2 r^2 \alpha + (K_2 + K_4) r^2 \theta - K_4 r y$$

[y] $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m \ddot{y}$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = K_3 (y - \alpha r) + K_4 (y - \theta r) = -K_3 r \alpha - K_4 r \theta + (K_3 + K_4) y$$

Eq.^{s} de movimento:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\alpha} + (K_1 + K_3) r^2 \alpha - K_2 r^2 \theta - K_3 r y = 0 \\ I_2 \ddot{\theta} - K_2 r^2 \theta + (K_2 + K_4) r^2 \theta - K_4 r y = 0 \\ m \ddot{y} - K_3 r \alpha - K_4 r \theta + (K_3 + K_4) y = 0 \end{cases}$$

d)

Matriz de massa

$$[m] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez

$$[k] = \begin{bmatrix} (K_1+K_3)n^2 & -K_3n^2 & -K_3n \\ -K_2n^2 & (K_2+K_4)n^2 & -K_4n \\ -K_3n & -K_4n & (K_3+K_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135 & -135 & -450 \\ -135 & 202,5 & -450 \\ -450 & -450 & 6000 \end{bmatrix}$$

e)

Vetor arbitrário $\Rightarrow$ vetor dos deslocamentos estáticos para forças proporcionais às massas

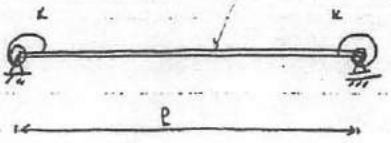
$$\{\alpha\} = [k^{-1}] \cdot \{f\} = [k^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ m \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0074 & -0,0074 & -0,0022 \\ -0,0074 & 0,0049 & -0,0022 \\ -0,0022 & -0,0022 & 0,0033 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 30 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,066 \\ -0,0665 \\ 0,09422 \end{Bmatrix}$$

f)

$$R\{\{\alpha\}\} = \frac{\{\alpha\}^T \cdot [k] \cdot \{\alpha\}}{\{\alpha\}^T \cdot [m] \cdot \{\alpha\}} = \frac{0,1054}{0,00229} = 1^{\circ} \text{ aula}$$

3. A, I, E, ρ — V.L.V.



a)

Condições de fronteira:

$x=0 \Rightarrow V(0,t)=0$ ①

$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t)=0$ (momento fletor nulo)

$x=\ell \Rightarrow V(\ell,t)=0$ ②

$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\ell,t)=0$ (momento fletor nulo)

b)

Aproximação da forma fundamental: $V_{(x)} = \sqrt{\frac{2}{\rho A \ell}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x$

⇒ tem de respeitar as condições de fronteira geométrica ① e ②

$V(0) = \delta \operatorname{sen} 0 = 0$

$V(\ell) = \delta \operatorname{sen} \pi = 0$

c)

Energia potencial máxima:

$U_{MAX} = U_{MAX}^{V} + U_{MAX}^{K} = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2} K \left(\frac{dV(0)}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{dV(\ell)}{dx}\right)^2$

(deformada provocada nas molas)

$\frac{dV(x)}{dx} = \delta \cdot \frac{\pi}{\ell} \cos \frac{\pi}{\ell} x$

$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\delta \cdot \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x$

$\left[\left(\frac{dV(0)}{dx}\right)^2 = \left(\delta \frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)\right]_0^\ell$

$U_{MAX} = \frac{1}{2} EI \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \cdot \delta^2 \int_0^\ell \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) dx + \left[\frac{1}{2} K \cdot \delta^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)\right]_{x=0}^{x=\ell}$

$\int_0^\ell \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) dx = \frac{\ell}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi}{2\ell} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\ell} x\right)\right]_0^\ell = \frac{\ell}{2}$

$U_{MAX} = \frac{1}{4} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^3} + K \delta^2 \frac{\pi^2}{\ell^2}$

Energia cinética máxima:

$$T_{MAX} = \omega^2 T^* = \omega^2 \cdot T^* = \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A\, V^2(x)\, dx = $$

$$= \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \rho A \delta^2 \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) dx = \omega^2 \frac{1}{4} \rho A \delta^2 \ell$$

Estimativa da frequência fundamental de vibração:

$$\omega^2 = \frac{V_{MAX}}{T^*} = \frac{\frac{1}{4} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^3} + K\delta^2 \frac{\pi^2}{\ell^2}}{\frac{1}{4} \rho A \delta^2 \ell} = \frac{EI\pi^4 + 4K\pi^2\ell}{\rho A \ell^4}$$

a)

$V^* = \beta \ell$

$K \to 0$

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{\ell^4 \rho A} \Rightarrow \omega = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \Rightarrow$$ frequência fundamental exata de vibração de uma viga simplesmente apoiada

$\Downarrow$

é equivalente a termos

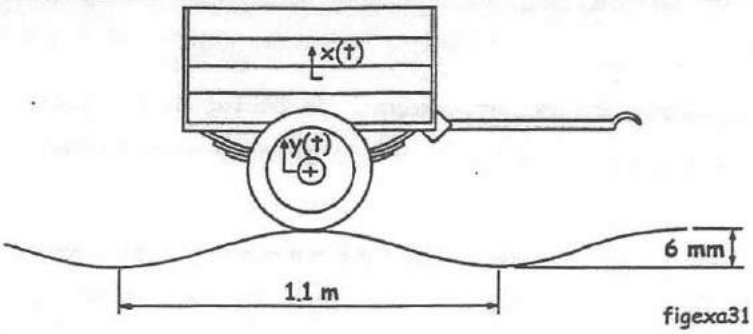
$\Downarrow$



$K \to \infty$

$\omega \to \infty \Rightarrow \beta^2 \to \infty$

e)



figexa31

1) O atrelado representado na figura e a respectiva suspensão constituem um oscilador elementar com um grau de liberdade. A massa do atrelado é de 500 kg, a rigidez equivalente (molas+pneus) é de 5.25×10^6 N/m e a constante de amortecimento é de 20×10^3 Ns/m.

O atrelado é rebocado por um veículo sobre a superfície de uma estrada, a qual é equivalente a uma onda tipo seno, com uma amplitude de 3×10^{-3} m e um comprimento de onda de 1.1m. As rodas estão permanentemente em contacto com a estrada.

Sabendo que a velocidade do atrelado é de 17m/s, determinar:

a) a frequência ω de excitação do sistema;
b) a equação de movimento do sistema;
c) A transmissibilidade dos movimentos absoluto, TR_{abs} e relativo, TR_{rel};
d) a resposta x(t) do sistema;
e) a força $F_T(t)$ transmitida ao atrelado;

Ao passar, inadvertidamente, num buraco da estrada, os amortecedores da suspensão do atrelado partiram-se e deixaram de actuar.

a) Qual a velocidade que o condutor deve adoptar a partir desse instante para que a amplitude da resposta seja inferior à amplitude da estrada.

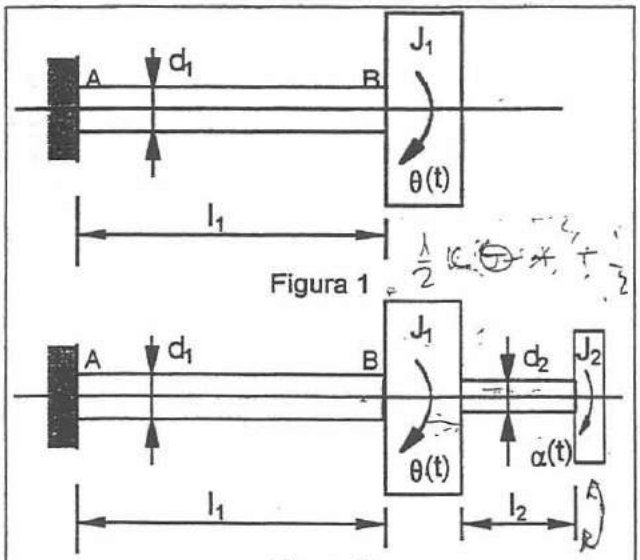


Figura 1

Figura 2

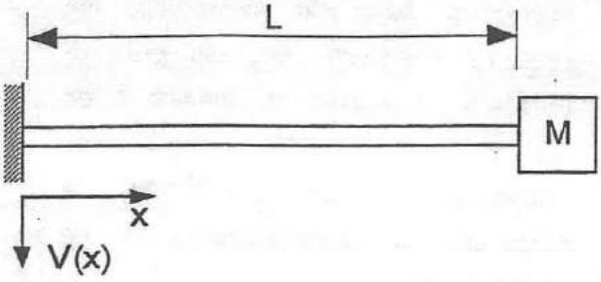
$G=83.15 \times 10^9$ Pa $\quad \rho=7.85 \times 10^3$ kgm^{-3}
$d_1=20 \times 10^{-3}$ m $\quad d_2=10 \times 10^{-3}$m $\quad l_1=0.8$ m

2) A figura representa um veio de diâmetro d_1 e comprimento l_1, encastrado na extremidade A e com um volante de momento de inércia J_1 na extremidade B. O material do veio possui um módulo de elasticidade transversal G, e uma massa específica ρ.

Aplicando ao volante um momento torsor $M_t(t)=M_0 \cos\omega t$, cuja frequência ω é idêntica à frequência natural do sistema constituído pelo veio e pelo volante, o que provoca vibrações de grande amplitude no sistema. No sentido de alterar esta situação, monta-se no eixo de rotação um veio e um volante suplementares, como se mostra na figura.

Determinar:

a) a energia cinética do sistema;
b) a energia potencial do sistema;
c) as equações do movimento do sistema na forma matricial;
d) A rigidez do veio suplementar e a inércia do volante suplementar de modo que as frequências naturais ω_1 e ω_2 do novo sistema sejam respectivamente, 45.000 e 64.857 rad/s;
e) o comprimento l_2 do veio suplementar.
f) a equação geral que define a razão de frequências $\alpha = \frac{\omega_s}{\omega_n}$ em função dos valores de $\beta_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n}$ e de $\beta_2 = \frac{\omega_2}{\omega_n}$.



3) Uma viga de comprimento L, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I_z e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, está encastrada numa extremidade e possui, na outra extremidade, uma massa concentrada M, conforme se representa na figura.

0,5 a) Escrever as condições de fronteira que uma aproximação $V(x)$ da forma fundamental de vibração deve verificar para que seja aplicável no método da energia de Rayleigh.

Sabendo que a deformada estática provocada por uma força P aplicada em x=L é dada pela expressão $V(x) = \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\frac{PL^3}{3EI}$, determinar:

0,5 a) a constante de rigidez k equivalente da viga;

0,5 b) a energia potencial máxima, U_{max};

c) a energia cinética máxima, T_{max}, desprezando a massa da viga;

0,5 d) a estimativa da frequência fundamental de vibração, ω_e;

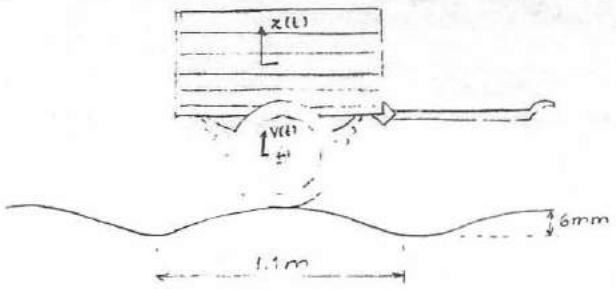
0,5 e) o valor da massa M'=(M+αm) concentrada em x=L e equivalente à massa m da viga e à massa concentrada M.

A função $\Phi(x) = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi}{2L}x\right)$ é também aplicável no método da energia de Rayleigh.

0,25 f) Representar a variação da estimativa da frequência fundamental, ω_e, para ambas as funções $V(x)$ e $\Phi(x)$ em função do parâmetro $\lambda = \frac{M}{m}$, onde M e m designam, respectivamente, a massa concentrada e a massa da viga. Comentar para os valores limite do parâmetro λ ($\lambda \to 0$ e $\lambda \to \infty$).

Vibrações mecânicas - 96.02.12

1)



$m = 500\ kg$
$k_{eq} = 5{,}25 \times 10^6\ N/m$
$c = 20 \times 10^3\ Ns/m$
$A = 3 \times 10^{-3}\ m$
$\lambda = 1{,}1\ m$
$v = 17\ m/s$

a) Frequência de excitação (ω):

$\lambda = N.T \Rightarrow T = \frac{1{,}1}{17} = 0{,}0647\ s$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}0647} \Rightarrow \omega = 97{,}11\ Rad/s$

b) Equação de movimento:

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$ Para $y(t) = Y\cos\omega t = 0{,}003\cos(97{,}11\,t)$

$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Y\sqrt{k^2 + (\omega c)^2}\cos(\omega t + \gamma)$ $\quad \gamma = tg^{-1}\frac{\omega c}{k} = tg^{-1}\frac{97{,}11 \times 20\times10^3}{5{,}25\times10^6}$

$\Rightarrow 500\ddot{x} + 20\times10^3\dot{x} + 5{,}25\,x = 16793{,}2\cos(97{,}11\,t + 0{,}354)$.

$\Rightarrow \gamma = 0{,}354\ rad$

c) Transmissibilidade absoluta (TR_a) e relativa (TR_r)

$$TR_a = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \beta = \frac{97{,}11}{102{,}47} = 0{,}948$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{5{,}25\times10^6}{500}} = 102{,}47\ rad/s$

$\zeta = \frac{c_{eq}}{c_{cr}}$

$c_{cr} = 2\sqrt{k_{eq}\,m_{eq}} = 2\sqrt{5{,}25\times10^6 \times 500} = 324037\ Ns/m$

$\zeta = \frac{20\times10^3}{324037} = 0{,}062$

$$TR_a = \frac{\sqrt{1 + (2\times0{,}062\times0{,}948)^2}}{\sqrt{(1-0{,}948^2)^2 + (2\times0{,}062\times0{,}948)^2}} = 6{,}488$$

$$TR_r = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{0{,}948^2}{\sqrt{(1-0{,}948^2)^2 + (2\times0{,}062\times0{,}948)^2}} = 5{,}79$$

d) Resposta do sistema:

$x(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \psi)$

$X(\omega) = Y.TR_a \Rightarrow X(\omega) = 3\times10^{-3}\times6{,}488 = 0{,}0195$

$\psi = tg^{-1}\frac{2\zeta\beta^3}{1-\beta^2+(2\zeta\beta)^2} = tg^{-1}\frac{2\times0{,}062\times0{,}948^3}{1-0{,}948^2+(2\times0{,}062\times0{,}948)} \Rightarrow \psi = 0{,}45\ rad$

$x(t) = 0{,}0195\cos(97{,}11\,t - 0{,}45)$

e) Força transmitida (F_T):

$$F_T = F\frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} = 16793{,}2\,\frac{\sqrt{1+(2\times0{,}062\times0{,}948)^2}}{\sqrt{(1-0{,}948^2)^2+(2\times0{,}062\times0{,}948)^2}} = 108966\,N$$

f) Nova velocidade (v_1):

Sistema não amortecido: $m\ddot{x}(t)+kx(t)=F\cos\omega t$

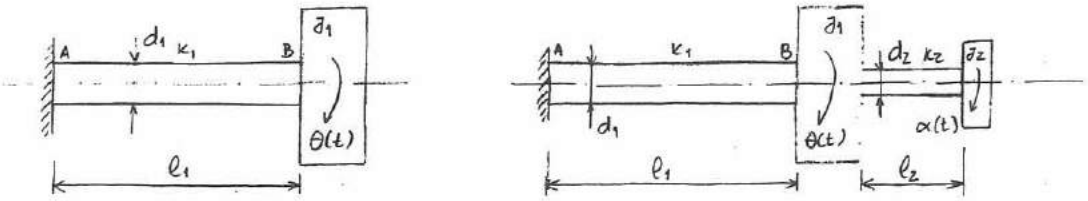
$$X(\omega)<0{,}003 \Leftarrow \frac{F}{k}|1-\beta^2|<0{,}003 \Rightarrow |1-\beta^2|<\frac{0{,}003\times5{,}25\times10^6}{16793{,}2} \Rightarrow \beta>0{,}25$$

$$\beta=\frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \omega=0{,}25\times97{,}11=24{,}28\ rad/s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{24{,}28}=0{,}26\,s$$

$$v_1=\lambda T=1{,}1\times0{,}26 \Rightarrow v_1=0{,}286\ m/s$$

2)



$G = 83.15\times10^9\,Pa$ $\quad d_1=20\times10^{-3}\,m$ $\quad \ell_1=0.8\,m$ $\quad M_t(t)=M_0\cos\omega t$

$\rho = 7.85\times10^3\,kg\,m^{-3}$ $\quad d_2=10\times10^{-3}\,m$ $\quad \omega=\omega_n$

$$I_{P_1}=\frac{\pi d^4}{64}=7{,}85\times10^{-9}\,m^4 \qquad I_{P_2}=\frac{\pi d^4}{64}=4{,}9\times10^{-10}\,m^4$$

$$J_1=\rho I_P=6{,}16\times10^{-5}\,kg/m^2$$

a) Energia cinética (T):

$$T=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\alpha}^2$$

b) Energia potencial (V):

$$V=\frac{1}{2}k_1\theta^2+\frac{1}{2}k_2(\theta-\alpha)^2$$

c) Equações do movimento:

$$L=T-V=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\alpha}^2-\frac{1}{2}k_1\theta^2-\frac{1}{2}k_2(\theta-\alpha)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-k_1\theta-k_2(\theta-\alpha)=(-k_1-k_2)\theta+k_2\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha}=+k_2(\theta-\alpha)=k_2\theta-k_2\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=J_1\ddot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right)=J_2\ddot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\bar{Q}_i$$

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}+(k_1+k_2)\theta-k_2\alpha=M_0\cos\omega t \\ J_2\ddot{\alpha}-k_2\theta+k_2\alpha=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\alpha}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \alpha(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_0 \cos \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d) Rigidez k_2 e momento de inércia J_2:

Para $\omega_1 = 45$ rad/s

$\omega_2 = 64,857$ rad/s

$$\varepsilon = \frac{J_2}{J_1} \qquad \alpha = \frac{\omega_s}{\omega_n}$$

$$\beta^4 - (\alpha^2 + \varepsilon\alpha^2 + 1)\beta^2 + \alpha^2 = 0$$

1) Um oscilador elementar é constituído por uma massa m, um amortecedor de constante de amortecimento c=40Ns/m e uma mola de rigidez k=1000N/m.

Quando posto a vibrar livremente, verifica-se que a razão de amplitudes entre a 1ª e a 4ª oscilações é de 200.

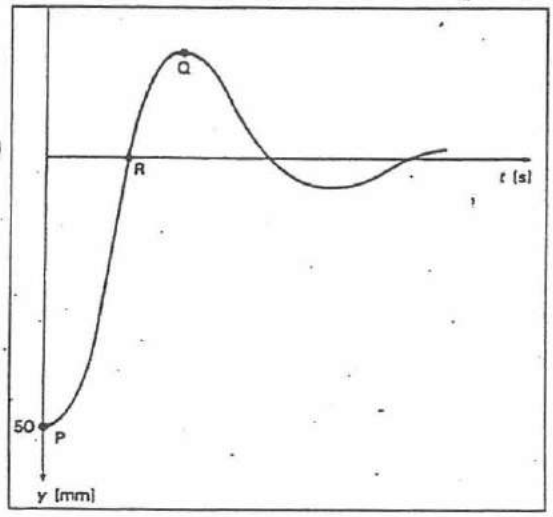
Determinar:

a) o decremento logarítmico δ e a razão de amortecimento ξ;

b) a massa do sistema e a equação diferencial do movimento;

c) a frequência natural angular não amortecida ω_n e amortecida ω_d

Se a massa, inicialmente em repouso, receber um deslocamento inicial de 50mm, abaixo da sua posição de equilíbrio estático, largando-se em seguida, a massa começa a vibrar verticalmente, como se representa na figura.

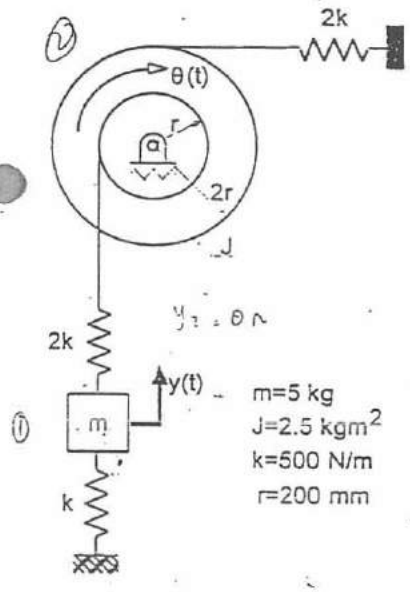


Determinar:

d) o tempo ao fim do qual a massa atinge a sua amplitude máxima;

e) a distância percorrida até esse instante;

f) o tempo ao fim do qual a massa passa pela 1ª vez pela posição de equilíbrio depois de largada.



2) O sistema vibratório representado na figura tem dois graus de liberdade e é não amortecido.

A posição da massa m é referenciada pela coordenada linear y(t) e a posição do disco é referenciada pela coordenada $\theta(t)$. Ambas as coordenadas são referidas à posição de equilíbrio estático do sistema.

a) Determinar as equações do movimento do sistema:

b) Escrever as equações do movimento na forma matricial calculando os respectivos termos;

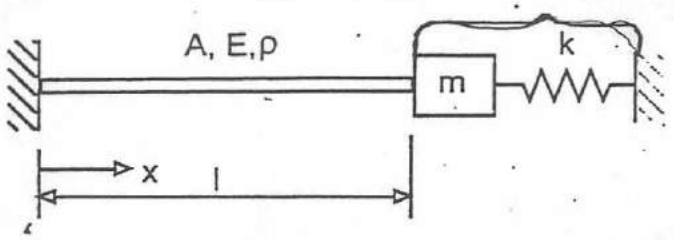
c) Determinar as frequências naturais de vibração.

d) Determinar e representar as formas naturais de vibração.

Admitindo que sobre o disco actua um momento $M(t)=M_0 \sin\omega t$,

e) Exprimir as equações do movimento na base modal.

f) Determinar, por sobreposição modal, a resposta estacionária do sistema.



3) Uma barra de comprimento l, de secção recta de área A, e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, apresenta uma extremidade fixa e na outra extremidade está ligada a uma massa rígida m e a uma mola de rigidez k, conforme se representa na figura. Para a vibração longitudinal da barra,

a) Estabelecer a equação do movimento e respectivas condições de fronteira.

b) Escrever a equação característica ou de frequências.

c) Indicar os intervalos que contêm as três primeiras frequências naturais.

d) Esboçar, justificando, as três primeiras formas naturais de vibração.

Pelo método da energia de Rayleigh, e utilizando como aproximação da forma fundamental de vibração a função U(x)=a+bx, determinar:

e) os valores das constantes a e b;

f) a energia potencial máxima;

g) a energia cinética máxima;

h) a estimativa da frequência fundamental de vibração.

TESTE 18.01.95 PARTE PRÁTICA

1.

massa : m

amortecedor : c = 40 Ns/m

mola : k = 1000 N/m

$\frac{x_0}{x_4} = 200$

a)

Decremento logarítmico (p=3)

$\delta = \frac{1}{p} \ln \frac{x_i}{x_{i+p}} = \frac{1}{3} \ln 200 = 1,766$

Razão de amortecimento

$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = \frac{1,766^2}{\sqrt{4\pi^2 + 1,766^2}} = 0,478$

b)

Massa do sistema

Amortecimento crítico : $c_c = \frac{c}{\xi} = \frac{40}{0,478} = 83,7$ Ns/m

Massa : $c_c = 2\sqrt{km} \Rightarrow m = \frac{1}{4} \frac{c_c^2}{k} = 0,25 \times \frac{83,7^2}{1000} = 1,752$ kg

Equação diferencial do movimento

$1,752\, \ddot{x}(t) + 40\, \dot{x}(t) + 1000\, x(t) = 0$

c)

Frequência natural angular não amortecida ω_n

$c_c = 2m\omega_n \Leftrightarrow \omega_n = \frac{c_c}{2m} = \frac{83,7}{2 \times 1,752} = 23,89$ rad/s

Frequência natural angular amortecida ω_d

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 23,89 \times \sqrt{1-0,478^2} = 20,98$ rad/s

d)

$x_0 = 50$ mm

Tempo ao fim do qual a massa atinge a sua amplitude máxima :

Resposta do sistema : $x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[x_0 \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t \right]$

$x(t) = e^{-11,42t} \left[-0,05 \cos(20,98t) - 0,2272 \operatorname{sen}(20,98t) \right]$

$x(t) = x_{max} \Rightarrow \dot{x}(t) = 0$

$e^{-11,42t} \left[0,5379 \cos(20,98t) + 0,3106 \operatorname{sen}(20,98t) + 1,049 \operatorname{sen}(20,98t) - 0,5379 \cos(20,98t) \right] = 0$

$1,36 \operatorname{sen}(20,98t) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 20,98t = k\pi \qquad k = 1, 2, \ldots \infty$

Para $k=1$ $\quad t = \frac{\pi}{20,98} = 0,15\ s \quad \Rightarrow \quad x(0,15) = 2,20 \times 2\ m$

$k=2$ $\quad t = 0,30\ s \quad \Rightarrow \quad x(0,30) = -0,0016\ m$

$\Rightarrow x(0,15) > x(0,30)$ ✓ o resultado está correcto

b) Distância percorrida até ao instante $t = 0,15\ s$

$$d = \int_0^t x(t)\,dt = \int_0^{0,15} e^{-11,42t}\left[-0,05\cos(20,98t) - 0,0272\operatorname{sen}(20,98t)\right] dt =$$

$$= \frac{-0,05}{11,42^2+20,98^2}\left[e^{-11,42t}\left(-11,42\cos(20,98t) + 20,98\operatorname{sen}(20,98t)\right)\right]_0^{0,15} - \frac{0,0272}{11,42^2+20,98^2}\left[e^{-11,42t}\left(-11,42\operatorname{sen}(20,98t) - 20,98\cos(20,98t)\right)\right]_0^{0,15} =$$

$$= \left[0,001\, e^{-11,42t}\cos(20,98t) - 0,0018\, e^{-11,42t}\operatorname{sen}20,98t + 0,00054\, e^{-11,42t}\operatorname{sen}(20,98t) + 0,001\cos(20,98t)\right]_0^{0,15} =$$

$$= \left[0,002\, e^{-11,42t}\cos(20,98t) - 0,00126\, e^{-11,42t}\operatorname{sen}(20,98t)\right]_0^{0,15} = -3,6\times10^{-4} - 3,6\times10^{-4} = -7,2\times10^{-4}\ m$$

$\Rightarrow \quad dp = |d| = 7,2\times10^{-4}\ m$

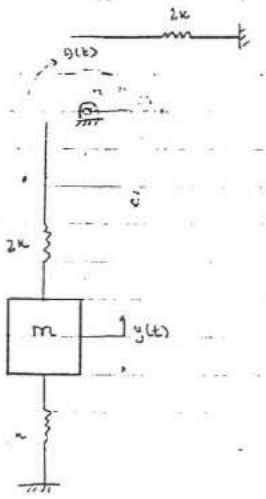
f) Tempo ao fim do qual a massa passa pela 1ª vez na posição de equilíbrio:

$x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -0,05\cos(20,98t) - 0,0272\operatorname{sen}(20,98t) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos(20,98t) + 0,544\operatorname{sen}(20,98t) = 0$

Pelo método de Newton $\Rightarrow \quad 20,98t = 2,569 \quad \Rightarrow \quad t \simeq 0,1\ s$

2.



Coordenadas generalizadas: y ; θ

$m = 5\ kg$

$J = 2,5\ kg\,m^2$

$k = 500\ N/m$

$r = 200\ mm$

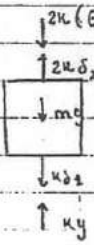
a) Equações de movimento do sistema

Bloco: Diagrama de corpo livre na posição de equilíbrio estático



$mg = -k\delta_1 + 2k\delta_2$

Diag. de corpo livre na posição de eq. dinâmico

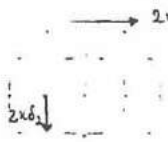


$m\ddot{y} = -2k(\theta r - y) - ky$

$m\ddot{y} - 2k(\theta r - y) + ky = 0$

$\boxed{m\ddot{y} + 3ky - 2kr\theta = 0}$

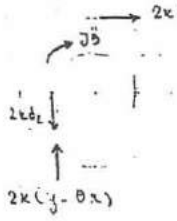
Disco: Diag. de corpo livre na posição de equ. estático.



$2k\delta_3 \times 2r = 2k\delta_2 \times r$

$\delta_3 = \frac{1}{2}\delta_2$

Diag. de corpo livre na posição de eq. dinâmico



$+2k(\theta r - y) \cdot r - 2k\theta \times 2r \times 2r = J\ddot{\theta}$

$\boxed{J\ddot{\theta} - 2kry + 6kr^2\theta = 0}$

b)

Matriz de massa: $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix}$

Matriz de rigidez $\begin{bmatrix} 3k & -2kr \\ -2kr & 6kr^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 & -200 \\ -200 & 120 \end{bmatrix}$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{y}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1500 & -200 \\ -200 & 120 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c)

Frequências naturais de vibração:

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\,\frac{5\times120 + 2{,}5\times1500}{5\times2{,}5} \mp 0{,}5\cdot\sqrt{\left(\frac{5\times120 + 2{,}5\times1500}{5\times2{,}5}\right)^2 - 4\cdot\frac{1500\times120 - 200^2}{5\times2{,}5}} = \begin{cases} 35{,}88 \\ 312{,}17 \end{cases}$$

$\omega_1 = 5{,}99$ rad/s

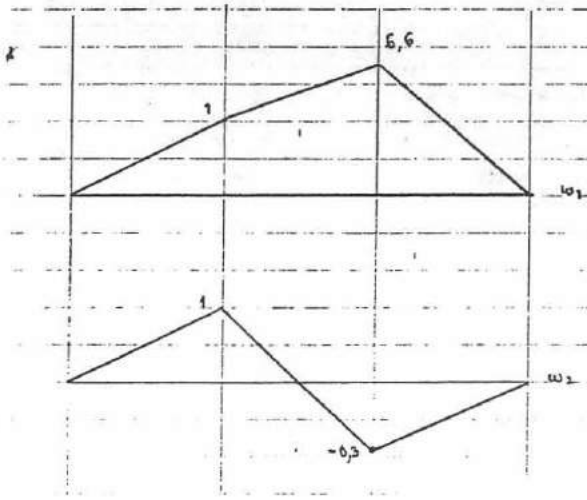
$\omega_2 = 17{,}67$ rad/s

d) Formas naturais de vibração:

Para $\omega^2 = \omega_1^2$ $\quad x_1 = \frac{u_{21}}{u_{11}} = \frac{1500 - 85,38 \times 5}{-200} = 6,6 \quad \Rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6,6 \end{Bmatrix}$

Para $\omega^2 = \omega_2^2$ $\quad x_2 = \frac{u_{22}}{u_{12}} = \frac{1500 - 312,11 \times 5}{-250} = -0,3 \quad \Rightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,3 \end{Bmatrix}$

Representação gráfica:



e) Equações de movimento na base modal:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + \omega_1^2 \eta(t) = N_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + \omega_2^2 \eta(t) = N_2(t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \{N(t)\} = \begin{Bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{Bmatrix} = [\bar{u}]^T \{\zeta(t)\}$$

Normalização da matriz modal:

$$\{\bar{u}\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^T [m] \{u\}_i}} \{u\}_i$$

$$\{u\}_1^T [m] \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 6,6 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6,6 \end{Bmatrix} = 113,9 \quad \Rightarrow \{\bar{u}\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,09 \\ 0,62 \end{Bmatrix}$$

$$\{u\}_2^T [m] \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 & -0,3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,3 \end{Bmatrix} = 0,225 \quad \Rightarrow \{\bar{u}\}_2 = \begin{Bmatrix} 2,11 \\ -0,63 \end{Bmatrix}$$

$$\{N(t)\} = \begin{bmatrix} 0,09 & 0,62 \\ 2,11 & -0,63 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b \\ M_0 \operatorname{sen} \omega t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,62 \; M_0 \operatorname{sen} \omega t \\ -0,63 \; M_0 \operatorname{sen} \omega t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 35,88 \, \eta_1(t) = 0,62 \; M_0 \operatorname{sen} \omega t \\ \ddot{\eta}_2(t) + 312,11 \, \eta_2(t) = -0,63 \; M_0 \operatorname{sen} \omega t \end{cases}$$

f) Resposta estacionária do sistema

Resposta a uma solicitação arbitrária:

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau)\ \operatorname{sen}\omega_i(t-\tau)\,d\tau$$

$$\eta_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t 0{,}532\ M_0\ \operatorname{sen}\omega t\ \operatorname{sen}\omega_1(t-\tau)\,d\tau =$$

$\operatorname{sen}\omega_1 t \operatorname{sen}\omega_1(t-\tau) = ?$

$\alpha = \omega t$

$\beta = \omega_1 t - \omega_1 \tau$

$? = -\frac{1}{2}\left(\cos(\omega t - \omega_1(t-\tau)) - \cos(\omega t + \omega_1(t-\tau))\right)$

$$= -\frac{0{,}532}{2\omega_1} M_0 \left[\int_0^t \cos\left[\omega t + \omega_1(t-\tau)\right]d\tau - \int_0^t \cos\left[\omega t - \omega_1(t-\tau)\right]d\tau\right]$$

$$= -\frac{0{,}31}{\omega_1} M_0 \left\{\left[\frac{-1}{\omega_1}\operatorname{sen}\left[\omega t + \omega_1(t-\tau)\right]\right]_0^t - \left[\frac{1}{\omega_1}\operatorname{sen}\left[\omega t - \omega_1(t-\tau)\right]\right]_0^t\right\}$$

$$= -\frac{0{,}31}{\omega_1^2} M_0 \left[-\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}\left[\omega t + \omega_1 t\right] - \operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}\left[\omega t - \omega_1 t\right]\right]$$

$$= -0{,}009\ M_0 \left[-2\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}\left[\omega t + \omega_1 t\right] + \operatorname{sen}\left[\omega t - \omega_1 t\right]\right]$$

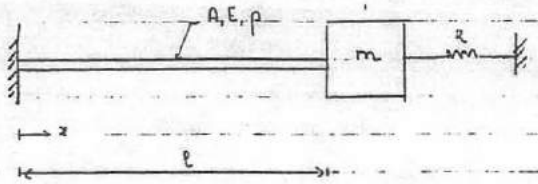
$$\eta_2(t) = +\frac{0{,}63}{2\omega_2^2} M_0 \left[-2\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}\left[\omega t + \omega_2 t\right] + \operatorname{sen}\left[\omega t - \omega_2 t\right]\right]$$

$$= 0{,}001\ M_0 \left[-2\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}\left[\omega t + \omega_2 t\right] + \operatorname{sen}\left[\omega t - \omega_2 t\right]\right]$$

$$\begin{Bmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}09 \\ 0{,}62 \end{Bmatrix} \cdot (-0{,}009)\, M_0 \left[-2\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}(\omega t + \omega_1 t) + \operatorname{sen}(\omega t - \omega_1 t)\right] +$$

$$+ \begin{Bmatrix} 2{,}11 \\ -0{,}63 \end{Bmatrix} \cdot 0{,}001\ M_0 \left[-2\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}(\omega t + \omega_2 t) + \operatorname{sen}(\omega t - \omega_2 t)\right]$$

5.



Vibrações longitudinais da barra

a)

Equação do movimento:

Equação do regime livre: $c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ e $c^2 = \frac{E}{\rho}$

Condições de fronteira:

- $u(0,t) = 0$
- $x = \ell \Rightarrow AE \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = -k\,u(\ell,t) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\ell,t)$

Relação def. longitudinal-força:

$p(x,t) = EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

$\overleftarrow{P(t)} \quad \overrightarrow{F} \quad F = Fm + Fe = k\,u(\ell,t) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\ell,t)$

$AE \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = -k\,u(\ell,t) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\ell,t)$

b)

Equação característica ou de frequências:

$u(x,t) = U(x) \cdot g(t) = \left[A \cos \frac{\omega}{c} x + B \operatorname{sen} \frac{\omega}{c} x \right] \cdot \left[C \cos \omega t + D \operatorname{sen} \omega t \right]$

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{dU(x)}{dx} g(t) = \frac{\omega}{c} \left[-A \operatorname{sen} \frac{\omega}{c} x + B \cos \frac{\omega}{c} x \right] \cdot \left[C \cos \omega t + D \operatorname{sen} \omega t \right]$

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = U(x) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -\omega^2 U(x) \cdot g(t) = -\omega^2 u(x,t)$

1ª c.f.: $u(0,t) = 0 \Rightarrow U(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

2ª c.f.: $AE \frac{\omega}{c} \left[-A \operatorname{sen} \frac{\omega}{c} \ell + B \cos \frac{\omega}{c} \ell \right] = \left[-k - m\omega^2 \right] \cdot \left[A \cos \frac{\omega}{c} \ell + B \operatorname{sen} \frac{\omega}{c} \ell \right]$

Como $A = 0$

$AE \frac{\omega}{c} B \cos \frac{\omega}{c} \ell = -\left[k + m\omega^2 \right] B \operatorname{sen} \frac{\omega}{c} \ell$

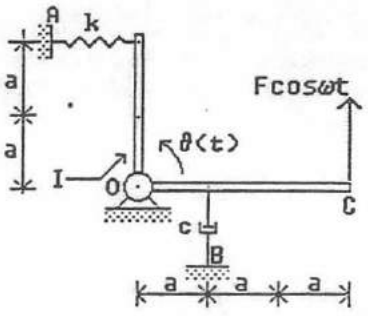
$-\operatorname{tg} \frac{\omega}{c} \ell = \frac{AE \frac{\omega}{c}}{-[k + m\omega^2]}$ → equação de frequências

c)

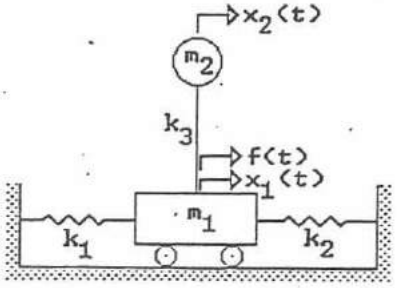
Intervalos que contêm as 3 primeiras frequências naturais

1) A figura representa um sistema mecânico constituído por um braço em forma de "L" que oscila em torno do ponto O, em relação ao qual possui momento de inércia I, e que está ligado ao exterior por uma mola de rigidez K e por um amortecedor de tipo viscoso-com constante c.
Num ensaio do mecanismo em regime livre, a amplitude da 4ª oscilação é igual a 30 % da amplitude da 1ª oscilação.
Determinar:

a) a equação de movimento do sistema;
b) a razão de amortecimento ξ;
c) a constante de amortecimento c;
c) a frequência de ressonância de amplitude;
d) o valor máximo do factor de amplificação dinâmica;
e) a força transmitida ao apoio A para uma solicitação harmónica $f(t)=F\cos\omega t$ aplicada em C com F=500 N e ω=5 rad/s.



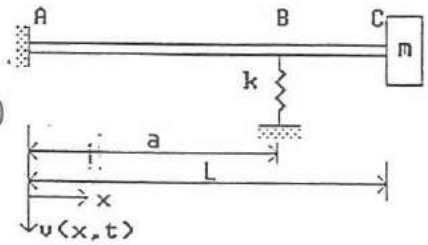
a=0.1 m
k=156.25 N/m
ω_n=25 rad/s



$k_1=k_2=2k$ $k_3=k$
$m_1=2m$ $m_2=m$

2) O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.
As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera respectivamente.

a) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.
b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.
c) Esboçar e comentar as formas naturais de vibração.
d) Normalizar os vectores modais de modo que as massas modais sejam unitárias.
e) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.
f) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ da resposta da massa m_1 quando $f(t)=F\cos\omega t$ com ω=14.14 rad/s , k=200 N/m e m=2 kg.
g) Redimensionar a rigidez k_3 da barra de modo que a amplitude $X_1(\omega)$ da massa m_1 seja nula.



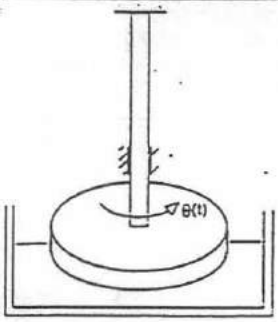
3) A figura representa uma viga de comprimento L, encastrada na extremidade A, apoiada em B numa mola de rigidez k, e com uma massa m concentrada na extremidade C, sujeita a uma vibração lateral V(x,t). A secção recta da viga apresenta uma área A e momento de inércia I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa específica ρ.
Utilizando o método da energia de Rayleigh,

a) Escolher, justificando a opção, uma das duas deformadas seguintes para aproximação da forma fundamental de vibração:

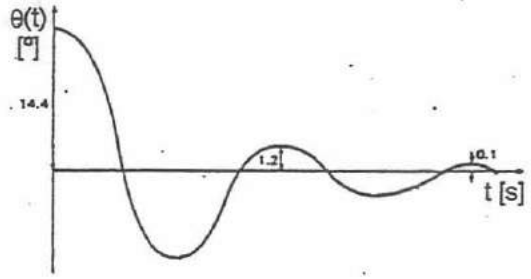
i) $V(x)=\delta \sin\frac{\pi}{2L}x$;

ii) $V(x)=\delta\left(1-\cos\frac{\pi}{2L}x\right)$

b) Determinar uma estimativa ω da frequência fundamental de vibração para $a=\frac{2}{3}L$.
c) Comentar o resultado.
d) Discutir a validade da solução obtida para valores limite da rigidez k da mola.



1) O disco de um pêndulo de torção possui um momento de inércia $J=0.6\ kgm^2$ e está imerso num fluido viscoso. O disco está montado num veio de bronze ($G=34.5x10^9\ N/m^2$), com um diâmetro de 9.0 mm e com um comprimento de 400 mm.
As amplitudes máximas em três oscilações consecutivas são, respectivamente, 14.4°, 1.2° e 0.1°, como se mostra na figura.
Determinar:
a) o decremento logarítmico e a razão de amortecimento;
b) as frequências angulares naturais não amortecida e amortecida;
c) o coeficiente de amortecimento e a equação de movimento do sistema;



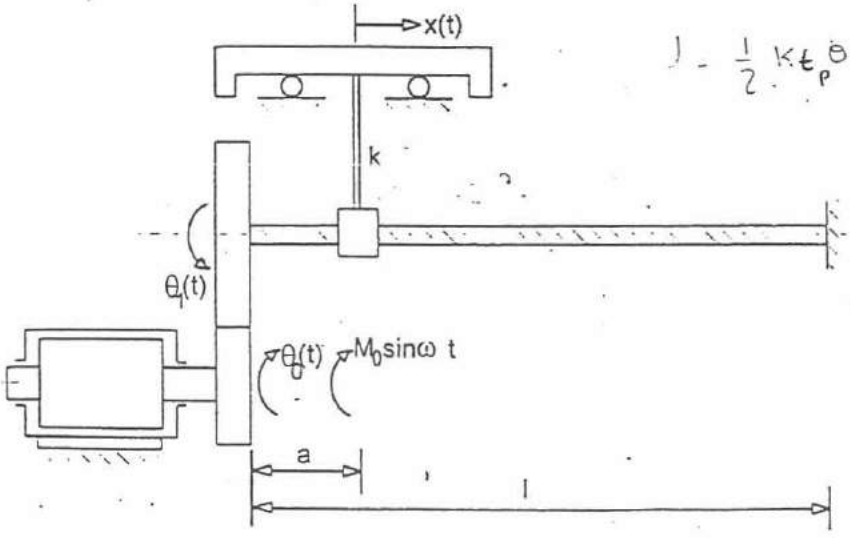
d) a resposta θ(t) do sistema;
e) utilizando a expressão da resposta do sistema, determinar o tempo ao fim do qual o disco passa pela 1ª vez pela posição de equilíbrio estático.

2) O sistema de transmissão representado na figura é constituído por:
- um motor cujo veio está acoplado de forma rígida a uma roda motora, sendo o momento polar de inércia do conjunto igual a J_0;
- uma roda movida de momento polar de inércia J_1;
- um parafuso com passo p, com secção recta de momento polar I_p, e de material com módulo de rigidez transversal G;
- uma barra de rigidez k;
- uma mesa de massa m em movimento de translação.

A razão de transmissão entre a roda motora e a roda movida é de 2 para 1.
As oscilações do sistema podem ser descritas pelos ângulo $\theta_0(t)$ e $\theta_1(t)$ de rotação das rodas motora e movida, e pelo deslocamento linear x(t) da mesa medidos a partir da posição de equilíbrio estático.
a) Estabelecer as equações de movimento do sistema.
(**Sugestão:** utilizar o formalismo de Lagrange)
b) Escrever as equações do movimento na forma matricial calculando os respectivos termos;
c) Determinar as frequências naturais de vibração.
d) Determinar as formas naturais de vibração.
Admitindo que sobre a roda motora actua um momento $M(t)=M_0 \sin\omega t$,
e) Exprimir as equações do movimento na base modal.
f) Determinar, por sobreposição modal, a resposta estacionária do sistema.

Aplicação numérica:

$J_0=2.4\ kgm^2$ $\quad$ $G=8x10^{10}\ N/m^2$ $\quad$ $l=2\ m$
$J_1=1.2\ kgm^2$ $\quad$ $k=1.5x10^5\ N/m$
$m=25\ kg$ $\quad$ $p=3.5\ mm/rad$
$I_p=9x10^{-9}\ m^4$ $\quad$ $a=0.25m$



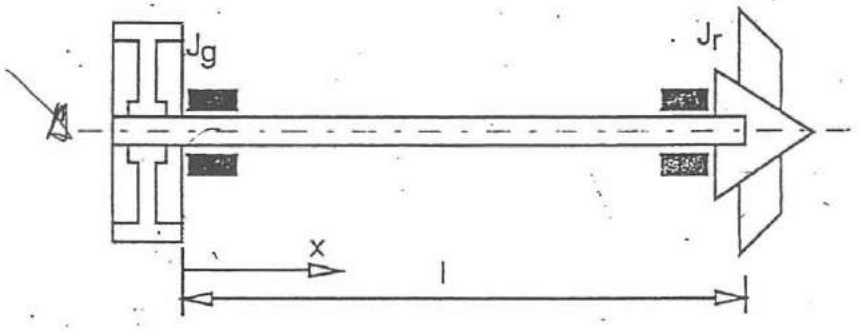
3) A figura representa um grupo hidroeléctrico constituído por um rotor gerador de momento de inércia J_g, por uma roda de pás de momento de inércia J_r e por um veio de comprimento l e de secção recta com momento polar de 2ª ordem I_p. O material do veio possui módulo de elasticidade transversal G e massa especifica ρ.

Pelo método da energia de Rayleigh e admitindo, para a forma fundamental de vibração de torção, a deformada angular $\theta(x) = \beta\left(\frac{x}{l} + \alpha\right)$, determinar:

a) a energia potencial máxima;
b) a energia cinética máxima;
c) a estimativa da frequência fundamental de vibração e comentar o resultado;
d) o valor óptimo do parâmetro α e a estimativa óptima da frequência. Justificar o procedimento utilizado.
e) Esboçar a aproximação da forma fundamental de vibração e determinar as coordenadas de eventuais pontos nodais.

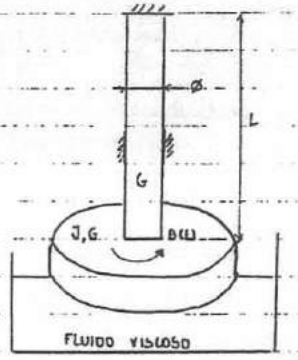
Aplicação numérica:

l=10 m	$I_p=5.0*10^{-3}$ m^4
J_g=8500 kgm^2	J_r=6500 kgm^2
ρ=7850 kg/m^3	G=0.8 Mbar



EXAME DE 03.02.95 — PARTE PRÁTICA

1.



$J = 0,6\ Kgm^2$

$G = 34,5 \times 10^9\ N/m^2$

$\phi = 9,0\ mm$

$l = 400\ mm$

amplitudes máximas em 3 oscilações consecutivas

14,4°

1,2°

0,1°

a)

Decremento logarítmico

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_3} = 0,5 \ln \frac{14,4}{0,1} = 2,485 \quad \text{ou} \quad \delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{14,4}{1,2} = 2,485$$

Razão de amortecimento

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{2,485}{\sqrt{4\pi^2 + 2,485^2}} = 0,368$$

b)

Frequência angular natural não amortecida

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{J_0}} \quad \text{e} \quad K_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GJ}{l} = \frac{\pi G d^4}{32 l} = \frac{\pi \cdot 34,5 \times 10^9 \cdot 0,0045^4}{32 \cdot 0,4} = 3,47\ Nm/rad$$

Freq $\omega_n = \sqrt{\frac{3,47}{0,6}} = 2,40\ rad/s$

Frequência angular natural amortecida

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 2,40 \cdot \sqrt{1 - 0,368^2} = 2,23\ rad/s$$

c)

Coeficiente de amortecimento

$$C = \xi \cdot c_c = 2\xi \sqrt{K_t J} = 2 \times 0,368 \cdot \sqrt{3,47 \cdot 0,6} = 1,11\ Ns$$

Equação de momento do sistema

$$0,6\ \ddot{\theta}(t) + 1,11\ \dot{\theta}(t) + 3,47\ \theta(t) = 0$$

d) Resposta $\theta(t)$ do sistema

Sistema subamortecido: $\theta(t) = e^{-\zeta \omega_n t} A \cos(\omega_c t - \phi)$

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n \theta_0}{\omega_c}\right)^2} = \sqrt{14,4^2 + \left(\frac{0,368 \cdot 2,40 - 14,4}{2,23}\right)^2} \simeq 15,5$$

(hipótese: o sistema parte do repouso)

$$\phi = tg^{-1}\frac{\zeta\omega_n}{\omega_c} = tg^{-1}\frac{0,368 \cdot 2,40}{2,23} = 0,38 \text{ rad}$$

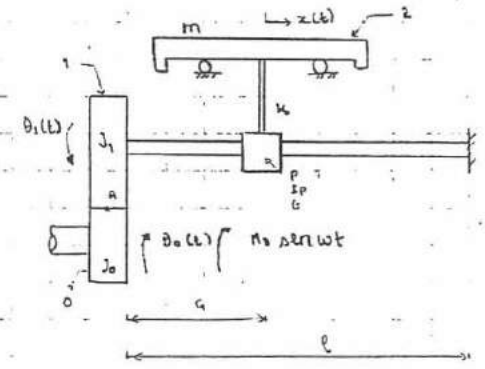
$$\Rightarrow \theta(t) = e^{-0,88t} 15,5 \cos(2,23t - 0,38)$$

e)

Posição de equilíbrio estático $\Rightarrow \theta(t) = 0 \Rightarrow \cos(2,23t - 0,38) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0,17$ s

2.



$J_0 = 2,4$ Kgm^2

$J_1 = 1,2$ Kgm^2

$m = 25$ Kg

$Ip = 9 \times 10^{-9}$ m^4

$G = 8 \times 10^{10}$ N/m^2

$l = 2$

$K = 15 \times 10^5$ N/m

$p = 3,5$ mm / rad

$a = 0,25$ m

a)

Equação de movimento do sistema:

Usando o formalismo de Lagrange

$x_1 = p\theta_1$ (para pino)

$$T = T_0 + T_1 + T_2 = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = V_p + V_B = \frac{1}{2} K_p \theta_1^2 + \frac{1}{2} K_t (x - x_1)^2 = \frac{1}{2} K_p \theta_1^2 + \frac{1}{2} K_t (x - p\theta_1)^2$$

Relação entre θ_1 e θ_0 $\Rightarrow$ relação entre a roda movida e a roda motora é de 2 para 1

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{x_0}{x_1}\theta_0 = \frac{1}{n}\theta_0$$

Módulo de rigidez do parafuso $\Rightarrow K_p = \frac{G I_p}{l} = \frac{8 \times 10^{10} \times 9 \times 10^{-9}}{2} = 360$ N/m

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(J_0 + \frac{1}{n^2} J_1\right)\dot{\theta}_0^2 + m\dot{x}^2\right]$$

$$V = \frac{1}{2} K_p \frac{1}{n^2}\theta_0^2 + \frac{1}{2} K_t \left(x - \frac{\rho}{n}\theta_0\right)^2$$

$\boxed{q_1 = \theta_0}$ $\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_0}\right) = \left(J_0 + \frac{1}{n^2} J_1\right)\ddot{\theta}_0 = J_{eq}\ddot{\theta}_0$ com $J_{eq} = 2{,}4 + \frac{1{,}2}{4} = 2{,}7\ Kgm^2$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_0} = \frac{1}{n^2} K_p \theta_0 - \frac{\rho}{n} K_t \left(x - \frac{\rho}{n}\theta_0\right)$$

$$\Rightarrow J_{eq}\ddot{\theta}_0 - \frac{\rho}{n} K_t x + \frac{1}{n^2}\left(K_p + \rho^2 K_t\right)\theta_0 = M_{motor}$$

Substituindo os valores $\quad 2{,}7\,\ddot{\theta}_0 - 262{,}5\,x + 361{,}8\,\theta_0 = M_{motor}$

$\boxed{q_2 = x}$ $\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = K_t\left(x - \frac{\rho}{n}\theta_0\right)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + K_t x - \frac{\rho}{n} K_t \theta_0 = 0$$

Substituindo os valores $\quad 25\,\ddot{x} + 1{,}5\cdot 10^5 x - 262{,}5\,\theta_0 = 0$

b)

Equações de movimento na forma matricial

Matriz de massa: $\quad [m] = \begin{bmatrix} 2{,}7 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix}$

Matriz de rigidez: $\quad [k] = \begin{bmatrix} 361{,}8 & -262{,}5 \\ -262{,}5 & 1{,}5\cdot 10^5 \end{bmatrix}$

Vector aceleração: $\quad \{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}$

Vector deslocamento: $\quad \{x\} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ x \end{Bmatrix}$

Vector das forças não conservativas: $\quad \{F\} = \begin{Bmatrix} M_{motor} \\ 0 \end{Bmatrix}$

Na forma matricial $\quad [m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}$

$$\begin{bmatrix} 2{,}7 & 0 \\ 0 & 2{,}5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 361{,}8 & -262{,}5 \\ -262{,}5 & 1{,}5\cdot 10^5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_0 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{motor} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) Frequências naturais de vibração

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2,7\cdot 1,5\cdot 10^5 + 2,5\cdot 361,8}{2,7\cdot 2,5} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2,7\cdot 1,5\,10^5 + 2,5\,361,8}{2,7\cdot 2,5}\right)^2 - 4\,\frac{361,8\cdot 1,5\cdot 10^5 - 262,5^2}{2,7\cdot 2,5}} = \begin{cases}\omega_1^2 = 133,8 \text{ rad/s}\\ \omega_2^2 = 60000 \text{ rad/s}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\omega_1 = 11,6 \text{ rad/s}\\ \omega_2 = 245 \text{ rad/s}\end{cases}$$

d) Formas naturais de vibração

$$\frac{u_{21}}{u_{11}} = \frac{361,8 - 133,8\cdot 2,7}{-262,5} = 0,002 \Rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix}1\\0,002\end{Bmatrix}$$

$$\frac{u_{22}}{u_{12}} = \frac{361,8 - 60000\cdot 2,7}{-262,5} = -615,8 \Rightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix}1\\-615,8\end{Bmatrix}$$

e) Equações do movimento na base modal

normalização dos vetores modais:

$$\{\bar{u}\}_1^T\cdot[m]\cdot\{u\}_1 = \begin{Bmatrix}1 & 0,002\end{Bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2,7 & 0\\ 0 & 2,5\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1\\0,002\end{Bmatrix} = 2,7 \Rightarrow \{\bar{u}\}_1 = \begin{Bmatrix}0,608\\0,0012\end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{u}\}_2^T\cdot[m]\cdot\{\bar{u}\}_2 = \begin{Bmatrix}1 & -615,8\end{Bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2,7 & 0\\ 0 & 2,5\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1\\-615,8\end{Bmatrix} = 948027 \Rightarrow \{\bar{u}\}_2 = \begin{Bmatrix}0,001\\-0,632\end{Bmatrix}$$

$$N(t) = [u]^T\cdot\{M(t)\} = \begin{bmatrix}0,608 & 0,0012\\ 0,001 & -0,632\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}M_0\operatorname{sen}\omega t\\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,608\,M_0\operatorname{sen}\omega t\\ -0,632\,M_0\operatorname{sen}\omega t\\ 0,001\end{Bmatrix}$$

Na base modal:

$$\begin{cases}\ddot{\eta}_1(t) + 133,8\,\eta_1(t) = 0,608\,M_0\operatorname{sen}\omega t\\ \ddot{\eta}_2(t) + 60000\,\eta_2(t) = -0,632\,M_0\operatorname{sen}\omega t\end{cases}$$

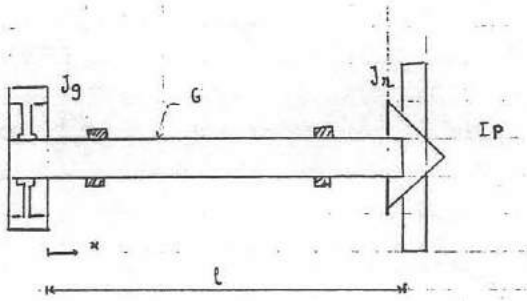
f) Resposta estacionária do sistema

Resposta ao regime harmônico de um sistema não amortecido:

$$0,608\,M_0\operatorname{sen}\omega t = 0,608\,M_0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\eta_p(t) = X(\omega)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

3.



$J = \rho I_p$

$J = 7850 \times 5 \times 10^{-3} = 39,25$

a)

Energia potencial máxima

Verificação da compatibilidade da função $\theta(x) = \beta\left(\frac{x}{\ell} + \alpha\right)$ com as condições de fronteira geométricas:

c.f.g:

- extremidade esquerda (rolamento) } condições naturais $\Rightarrow$ não temos condição geométrica
- " direita (roda de aço) }

Para a vibração de torção: $V_{MAX} = \frac{1}{2}\int_0^\ell GI_p \left(\frac{d\theta(x)}{dx}\right)^2 dx$

$$V_{MAX} = \frac{1}{2}\int_0^\ell GIp \left(\frac{\beta}{\ell}\right)^2 dx = \frac{1}{2} GIp \frac{\beta^2}{\ell^2}\ell = \frac{1}{2} GIp \frac{\beta^2}{\ell} = \frac{1}{2}\cdot 0,2\cdot 10^{9} \times \frac{5\times 10^{-3}}{10}\beta^2 = 20\times 10^6 \beta^2$$

b)

Energia cinética máxima

$$T_{MAX} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^\ell J\theta(x)^2 dx = \frac{1}{2}\omega^2 J \int_0^\ell \beta^2\left(\frac{x}{\ell}+\alpha\right)^2 dx = \frac{1}{2}\omega^2 J\beta^2 \left[\frac{\ell}{3}\left(\frac{x}{\ell}+\alpha\right)^3\right]_0^\ell =$$

$$= \frac{1}{6} J\omega^2\beta^2 \ell\left[(\ell^2+\alpha)^3 - \alpha^3\right] = \frac{1}{6} J\omega^2\beta^2\ell\left[\ell^6 + 3\ell^4\alpha + 3\ell^2\alpha^2\right] = \frac{1}{6} J\omega^2\beta^2\ell^2\left[\ell^4 + 3(\ell^2\alpha+\alpha^2)\right]$$

$$= 654,2\,\omega^2\beta^2\left[10^4 + 3(100\alpha + \alpha^2)\right]$$

c)

Estimativa da frequência fundamental

$$\omega_e^2 = \frac{V_{MAX}}{T_{MAX}} = \frac{20\times 10^6 \beta^2}{654,2\,\beta^2\left[10^4 + 3(100\alpha+\alpha^2)\right]} = \frac{20\times 10^6}{654,2\times 10^4 + 196250\alpha + 1962,5\alpha^2}$$

Comentário:

- a estimativa da frequência natural calculada é função do parâmetro α;
- esta estimativa difere da frequência natural arredondado de uma pequena quantidade de 2ª ordem
- esta estimativa possui um valor estacionário na vizinhança das formas naturais, sendo os valores estacionários as formas naturais
- na vizinhança do modo fundamental $(\omega_1^2, \theta_1(x))$ a estimativa apresenta um valor mínimo

→ o QR constitui uma estimativa da freq fund por excesso [illegible]

d)

Valor óptimo do parâmetro α

α_{opt} ⇒ valor + próximo da freq. fundamental ⇒ minimizar o ω_R ⇒ $\frac{d\omega_R}{d\alpha} = 0$

$$\frac{\partial \omega_R}{\partial \alpha} = 20\times10^6 \times \left(\frac{196250 + 3925\alpha}{(654{,}2\times10^4 + 196250\alpha + 1962{,}5\alpha^2)^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 196250 + 3925\,\alpha_{opt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{opt} = 50}$$

Estimativa óptima da frequência fundamental

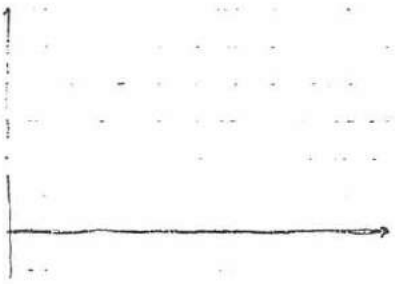
$$\omega_{opt} = R[\alpha_{opt}] = \frac{20\times10^6}{654{,}2\times10^4 + 196250\times50 + 1962{,}5\times50^2} = 0{,}94 \text{ rad/s}$$

e)

Aproximação da forma fundamental de vibração

- função aproximada da forma natural de vibração: $\theta(x) = \beta\left(\frac{x}{\ell} + \alpha\right)$

Substituindo $\alpha = \alpha_{opt} = 50$ ⇒ $\theta(x) = \beta\left(\frac{x}{10} + 50\right)$



2) O pórtico I,de massa m_1 e rigidez de cada pilar k_1, e o pórtico II, de massa m_2 e rigidez de cada pilar k_2, foram ligados através de uma mola de rigidez k_3 de modo a modificar o comportamento vibratório do conjunto. Os deslocamentos laterais das massas m_1 e m_2 são, respectivamente, $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

Determinar:

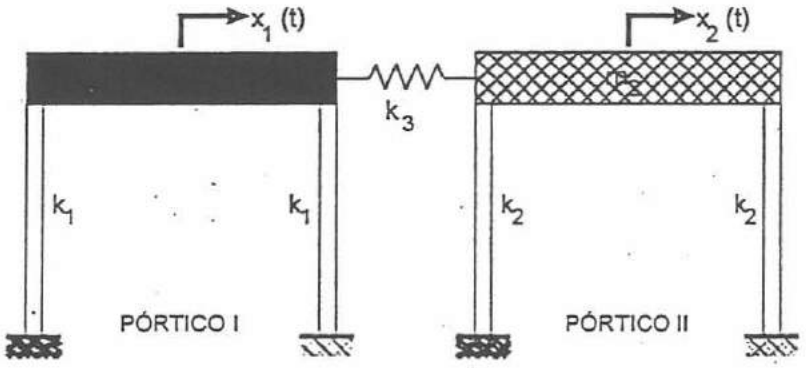
a) As frequências naturais de cada um dos pórticos, ω_{nI} e ω_{nII}, antes da introdução da mola k_3;

b) As equações de movimento do sistema, após introdução da mola k_3;

c) A equação característica ou de frequências do sistema;

d) A rigidez da mola k_3, de modo a que a frequência própria fundamental do conjunto, ω_1, seja igual a 93.7 % da frequência natural do pórtico I, ω_{nI};

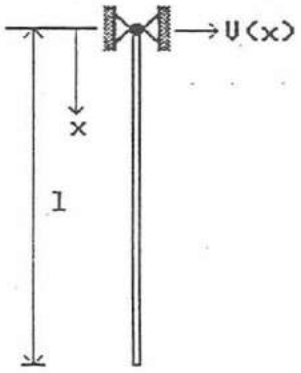
e) A segunda frequência própria do conjunto, ω_2, e as duas formas naturais de vibração;



$k_1=k/2 \quad k_2=0.6\ k$

$m_1 = m \quad m_2=1.5\ m$

$k_3= ak$



3) Uma viga de comprimento l, de secção recta de área A e momento de inércia I, e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, está articulada numa das suas extremidades e livre na outra, conforme se representa na figura. Pelo método da **energia de Rayleigh**, e admitindo para a forma fundamental de vibração de flexão a deformada $V(x) = ax - \delta \sin\frac{\pi}{l} x$, determinar:

a) a energia potencial máxima;

b) a energia cinética máxima;

c) a estimativa da frequência fundamental de vibração e comentar o resultado;

d) o valor óptimo do parâmetro a e a estimativa óptima da frequência. Justificar o procedimento utilizado.

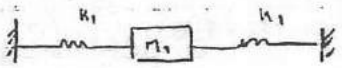
e) Esboçar a aproximação da forma fundamental de vibração e determinar as coordenadas de eventuais pontos nodais.

2.

a)

PÓRTICO I:

Sistema equivalente



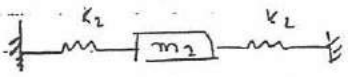
(molas em paralelo)

$K_{eq} = K_1 + K_1 = 2K_1 = K$

$\omega n_I = \sqrt{\frac{K}{m}}$

PÓRTICO II

Sistema equivalente

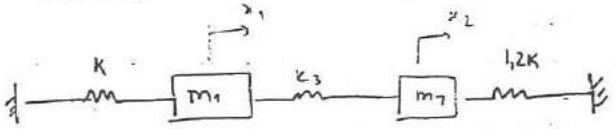


$K_{eq} = K_2 + K_2 = 2K_2 = 1{,}2K$

$\omega n_{II} = \sqrt{\frac{1{,}2K}{m}}$

b)

Sistema



$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

$U = U_k^1 + U_k^2 + U_k^3 = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K_3 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}2K\, x_2^2$

x_1 $\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$

$\frac{\partial U}{\partial x_1} = K x_1 + K_3 (x_1 - x_2) = (K + K_3) x_1 - K_3 x_2 = (1+a) K x_1 - a K x_2$

x_2 $\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$

$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -K_3 (x_1 - x_2) + 1{,}2K x_2 = (K_3 + 1{,}2K) x_2 - K_3 x_1 = K(1{,}2 + a) - a K x_1$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1{,}5m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K(1+a) & -aK \\ -aK & K(1{,}2+a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c)

$$[k] - \omega^2 [m] = \begin{bmatrix} k(1+a) & -ak \\ -ak & k(1,2+a) \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1,5m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k(1+a) - m\omega^2 & -ak \\ -ak & 1,5m\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\det = 0 \Rightarrow \quad 1,5m\omega^2 \cdot k(1+a) - 1,5m^2\omega^4 + a^2k^2 = 0$$

$$1,5m^2\omega^4 - 1,5mk(1+a)\omega^2 - a^2k^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1,5mk(1+a) \pm \sqrt{(1,5mk(1+a))^2 - 4 \cdot 1,5m^2 a^2 k^2}}{3m^2}$$

$$\omega^2 = \frac{k(1+a) \pm k\sqrt{2,25 + 4,5a + 2,25a^2 - 6a^2}}{2m}$$

$$\omega^2 = \frac{k(1+a) \pm k\sqrt{2,25 + 4,5a - 3,75a^2}}{2m}$$

d)

$$\omega_1 = 0,937\ \omega_1 = 0,937\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_1^2 = 0,877969\ \frac{k}{m}$$

$$2 \times 0,877969 = (1+a) - \sqrt{2,25 + 4,5a - 3,75a^2}$$

$$2,25 + 4,5a - 3,75a^2 = 1 + 2a + a^2 - 3,5119 - 3,5119a - 3,0833$$

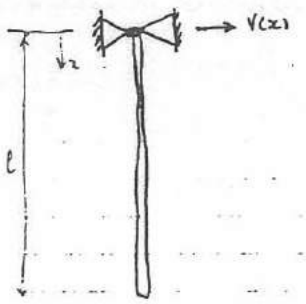
$$4,75a^2 - 6,0119 - 7,8452 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0,2867} \quad = \quad \boxed{k_3 = 0,0867\ k}$$

e)

$$\omega_2^2 = \frac{1,0867k + 1,6162k}{2m} = 1,351\ \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_2 = 1,162\sqrt{\frac{k}{m}}$$

3.



$$V(x) = ax - \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x$$

a)

$$U_{MAX} = U^* = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(x) \left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = a - \delta \frac{\pi}{\ell} \cos \frac{\pi}{\ell} x$$

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x$$

$$U_{MAX} = \frac{1}{2} EI \delta^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \int_0^\ell \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{\ell} x\right) dx = \frac{1}{2} EI \delta^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \cdot \frac{\ell}{\pi} \left[\frac{\pi}{2\ell} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\ell} x\right) \right]_0^\ell =$$

$$= \frac{1}{2} EI \delta^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^3 \cdot \left[\frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{4} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^3}$$

b)

$$T_{MAX} = \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A Y^2(x) \, dx = \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell \left(a^2 x^2 - 2\delta a x \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x + \delta^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\ell} x \right) dx$$

$$= \omega^2 \frac{1}{2} \rho A \cdot \left\{ a^2 \frac{\ell^3}{3} - 2\delta a \int_0^\ell x \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x \, dx + \delta^2 \int_0^\ell \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\ell} x \, dx \right\}$$

$$\int x \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x \, dx = -x \frac{\ell}{\pi} \cos \frac{\pi}{\ell} x + \frac{\ell}{\pi} \int \cos \frac{\pi}{\ell} x \, dx =$$

$$= -x \frac{\ell}{\pi} \cos \frac{\pi}{\ell} x + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x \, dx$$

$$\int_0^\ell x \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x \, dx = \left[-\frac{\ell^2}{\pi} \cdot \cos \pi \right] = +\frac{\ell^2}{\pi}$$

$$T_{MAX} = \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \rho A \left\{ a^2 \frac{\ell^3}{3} - 2\delta a \frac{\ell^2}{\pi} + \delta^2 \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\ell}{\pi} \right\}$$

c)

$$\omega^2 = \frac{U_{MAX}}{T_{MAX}} = \frac{\frac{1}{4} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^3}}{\frac{1}{2} \rho A \left\{ a^2 \frac{\ell^3}{3} - 2\delta a \frac{\ell^2}{\pi} + \delta^2 \frac{\ell}{2} \right\}}$$

d)

Valor óptimo de $a \Rightarrow$ aquele/aquela que minimiza $W \Rightarrow$ aquele que minimiza ω^2

$$\frac{d\omega^2}{da} = \frac{1}{4} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{l^3} \cdot \frac{\frac{1}{2}\rho A \left(2a\frac{l^3}{3} - 2\delta\frac{l^2}{\pi}\right)}{(\quad)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a\frac{l^3}{3} - 2\delta\frac{l^2}{\pi} = 0$$

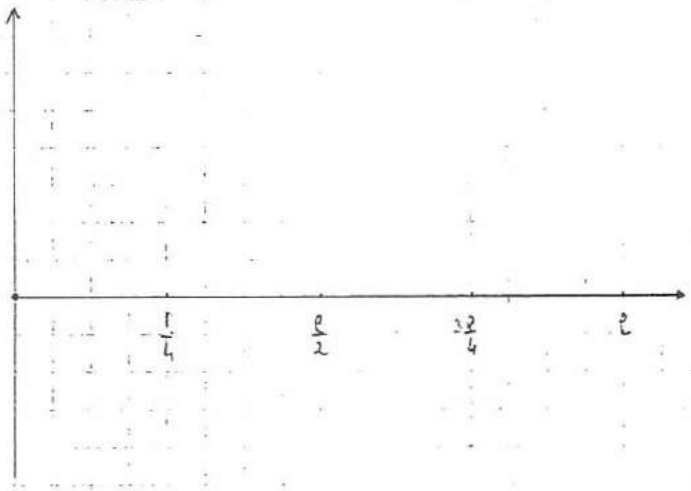
$$a\frac{l}{3} - \frac{\delta}{\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{\pi}\frac{\delta}{l}$$

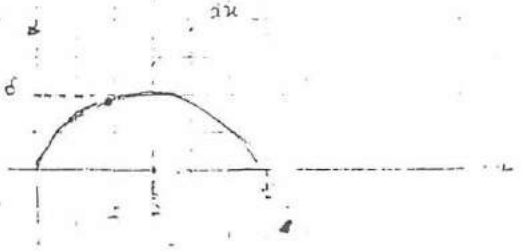
$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{4} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{l^3}}{\frac{1}{2}\rho A \left(\frac{9\delta^2}{\pi^2 l^2} \cdot \frac{l^3}{3} - 3\frac{\delta^2}{\pi l} \cdot \frac{l^2}{\pi} + \delta^2 \cdot \frac{l}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{l^3}}{\rho A \delta^2 \left(3\frac{l}{\pi^2} - 6\frac{l}{\pi^2} + \frac{l}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^4}{\left(\frac{3}{\pi^2} - \frac{6}{\pi^2} + \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{l^4} \cdot \frac{EI}{\rho A}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = 15{,}76 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

e)





1) O rotor de um instrumento de medida é controlado por uma mola de torção e um amortecedor viscoso de rotação montados nas suas extremidades.

A massa do rotor é de 50×10^{-3} Kg e o seu raio de giração em relação ao seu eixo de rotação é de 10×10^{-3} m.

Quando posto a vibrar, o rotor realiza uma oscilação completa em 3.25 s, sendo a razão entre duas amplitudes consecutivas de 5.

Determinar:

a) a razão de amortecimento ξ;

b) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

c) a rigidez k_t da mola de torção;

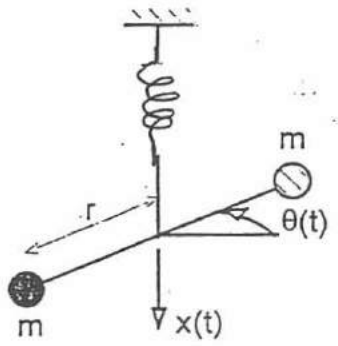
d) a constante c de amortecimento viscoso de rotação.

Se o rotor, inicialmente em repouso, receber um impulso que lhe provoca uma rotação máxima de 15°, determinar:

e) o tempo que demorou a rodar 15°;

f) a velocidade angular inicial provocada pelo impulso;

g) a energia fornecida pelo impulso.



2) O sistema representado na figura é constituído por duas massas m de 0.5 kg ligadas entre si por uma barra rígida, de massa desprezável e de comprimento 2r (r= 1 m) suspensa de uma mola. A mola, quando traccionada (ou comprimida) origina um momento de reacção, e, reciprocamente, quando torcida desenvolve uma força elástica de tracção (ou compressão).

A rigidez linear da mola é k_{xx}= 1000 N/m, a rigidez de torção é $k_{\theta\theta}$=1000 Nm e a rigidez de acoplamento é $k_{x\theta}= k_{\theta x}$= 100 N. As coordenadas x(t) e θ(t) estão referenciadas a partir da posição de equilíbrio estático.

a) Escrever as equações de movimento do sistema.

b) Calcular as frequências naturais de vibração.

c) Calcular e representar as formas naturais de vibração.

d) Calcular a resposta do sistema, pelo método da sobreposição modal, para as seguintes condições iniciais:

$$x(0) = 0 \qquad \theta(0) = 1 \text{ rad}$$
$$\dot{x}(0) = 0 \qquad \dot{\theta}(0) = 0$$

e) Representar e comentar a resposta x(t) e θ(t) do sistema.

Exame 19.07.94

1.

a)

Eq. de movimento do sistema: (regime livre)

$$J_0 \ddot{\theta} + C_r \dot{\theta} + K_r \theta = 0$$

Decremento logarítmico: $\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln 5 = 1,609$

Rácio de amortecimento: $\xi = \frac{\delta^2}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{1,609^2}{\sqrt{4\pi^2 + 1,609^2}} = 0,248$

b)

Frequência natural não amortecida: $\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3,25} = 1,93$ rad/s

c)

Rigidez da mola de torção: $K_T = J_0 \cdot \omega_n^2 = 5 \times 10^{-6} \times 1,93^2 = 1,87 \times 10^{-5} \simeq 2 \times 10^{-5}$ Nm/rad

$J_0 = m \cdot r_g^2 = 50 \times 10^{-3} \times (10 \times 10^{-3})^2 = 5 \times 10^{-6}$ Kgm^2

d)

$\xi = \frac{C}{C_c} \Rightarrow C = \xi \cdot \sqrt{2 K_T J_0} = 0,248 \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 3,5 \cdot 10^{-6}$ N m s/rad

e)

$$J\ddot{\theta} + C_r \dot{\theta} + K_r \theta = M^* \delta(t)$$

Resposta ao impulso: $\theta(t) = M^* \frac{1}{J_0 \omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 1,93 \cdot \sqrt{1 - 0,248^2} = 1,87$ rad/s

$\theta(t) = M^* \, 107 \cdot 10^3 \cdot t \, e^{-0,479 t} \operatorname{sen}(1,87 t)$

Rotação máxima $\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = -0,479 \, e^{-0,479 t} \operatorname{sen}(1,87t) + e^{-0,479 t} \cos(1,87t) \cdot 1,87$

$0 = e^{-0,479 t} \left(-0,479 \operatorname{sen}(1,87t) + 1,87 \cos(1,87t) \right)$

(met. de Newton) $\Rightarrow t = 2,386$ s

f)

$$-\frac{15 \times \pi}{180} = M^* \, 107 \cdot 10^3 \, e^{-0,479 \cdot 2,386} \operatorname{sen}(1,87 \cdot 2,386)$$

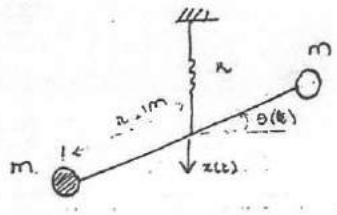
$\Rightarrow M^* = 8 \times 10^{-6}$ N m $\Rightarrow \omega_0 = \frac{M^*}{J_0} = \frac{8 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-6}} = 1,6$ rad/s

9)

Energia fornecida pelo impulso

$E = M \cdot \theta = ?$)

2.



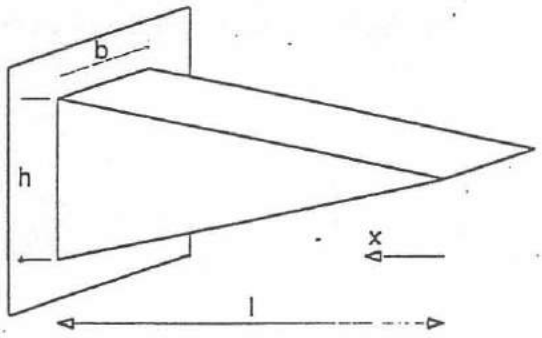
a)

Equações de movimento do sistema

Usando o método de Lagrange:

- energia cinética $T = T_{massa} + T_{barra} = 2 \times \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + 2 \times \frac{1}{2} m \times (\dot{\theta} l)^2 = m\dot{x}^2 + m\dot{x}^2\dot{\theta}^2$

- energia potencial $U = U_{k_x} + U_{k_\theta} + U_{k_{x\theta}} = \frac{1}{2} k_{xx} x^2 + \frac{1}{2} k_{\theta\theta} \theta^2 + \frac{1}{2} k_{x\theta} (x$



3) Uma viga de comprimento l, de secção recta rectangular cuja altura varia linearmente e cuja espessura é constante e igual a b, está encastrada numa das suas extremidades e livre na outra, conforme se representa na figura. O material da viga possui módulo de elasticidade E e massa especifica ρ. Utilizando o método da energia de Rayleigh para determinar a frequência fundamental de vibração de flexão da viga,

a) escolher, justificando, de entre as duas funções seguintes, uma aproximação para a forma fundamental de vibração de flexão:

i) $V_1(x) = \delta\left(1-\frac{x}{l}\right)$

ii) $V_2(x) = \delta\left(1-\frac{x}{l}\right)^2$

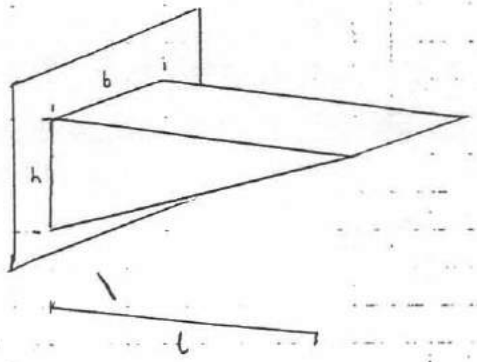
b) Determinar a energia potencial máxima;

c) Determinar a energia cinética máxima;

d) Determinar a estimativa da frequência fundamental de vibração e comentar o resultado;

e) Aproximando a viga representada por uma viga de massa equivalente e de secção constante, determinar qual seria a frequência fundamental. Comparar o resultado obtido com o da alínea d) e comentar.

3.



E, ρ

a)

Condições de fronteira:

$x = \ell \Rightarrow v(\ell, t) = 0$ ⇐ condição de fronteira geométrica

$\frac{dv}{dx}(\ell, t) = 0$ ⇐

$x = 0 \Rightarrow EI \frac{d^2v}{dx^2}(0,t) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t) \right) = 0$

$v_1(\ell) = 0 \quad ; \quad v_2(\ell) = 0$

$\frac{dv_1}{dx}(\ell) = -\frac{\delta}{\ell} \quad ; \quad \frac{dv_2}{dx} = -\frac{2\delta}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \Rightarrow \frac{dv_2}{dx}(\ell) = 0$

A única função que respeita as condições de fronteira geométricas é:

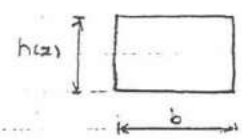
$$\boxed{v_2(x) = \delta\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2}$$

b)

$$U_{MAX} = U^* = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI(x)\left(\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right)^2 dx$$

$I(x)$ = momento de inércia da secção recta

secção rectangular:



$$I(x) = \frac{b h^3(x)}{12}$$

$$h(x) = \frac{h}{\ell} x \Rightarrow I(x) = \frac{b h^3}{12 \ell^3} x^3$$

$$\frac{d^2 v_2(x)}{dx^2} = 2\frac{\delta}{\ell^2}$$

$$U_{MAX} = \frac{1}{2} \cdot E \frac{b h^3}{12 \ell^3} \cdot \int_0^{\ell} x^3 \cdot 4\frac{\delta^2}{\ell^4} dx = \frac{1}{6} E \frac{b h^3}{\ell^7} \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\ell} = \frac{1}{24} E \frac{b h^3}{\ell^3}$$

c)

$$T_{MAX} = \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A(x)\, v^2(x)\, dx$$

$A(x)$ = área da secção recta $= b\,h(x) = \frac{bh}{\ell} x$

$$T_{MAX} = \omega^2 \, \frac{1}{2} \rho \frac{bh}{\ell} \int_0^\ell x \cdot \delta^2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^4 dx$$

$$\int x \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^4 dx = -x \frac{\ell}{5} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^5 + \frac{\ell}{5} \int \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^5 dx = \ldots$$

$$= -\frac{x\ell}{5} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{\ell^2}{30} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^6$$

$$T_{MAX} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho \frac{bh}{\ell} \cdot \frac{\ell^2}{30} = \frac{1}{60} \omega^2 \rho\, bh\ell$$

d)

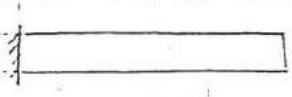
$$\omega^2 = \frac{V_{MAX}}{T_{MAX}} = \frac{\frac{1}{24} E \frac{bh^3}{\ell^3}}{\frac{1}{60} \rho\, bh\ell} = \frac{\frac{1}{2} \frac{EI_\square}{\ell^3}}{\frac{1}{60} \ell \rho A_\square}$$

momento de inércia de uma secção recta A em relação ao diâmetro de não rolamento

área de uma secção recta A em relação ao momento de não rolamento

$$\omega^2 = \frac{30}{\ell^4} \frac{EI_\square}{\rho A_\square} \Rightarrow \omega = \frac{5{,}48}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI_\square}{\rho A_\square}} = 5{,}48 \sqrt{\frac{EI_\square}{\rho A_\square \ell^4}}$$

e)



Equação de frequências: $\cos p_n \ell \cdot \cosh p_n \ell = -1 \Rightarrow p_1 \ell = 1{,}875$

$$\Rightarrow \omega_1 = (p_1 \ell)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} = 3{,}516 \sqrt{\frac{EI_\square}{\rho A_\square \ell^4}}$$

$\Rightarrow$ é inferior ao resultado obtido para a alínea d), o que seria de esperar já que o quociente de Rayleigh é um majorante da freq. fundamental de vibração

3) A figura representa uma viga simplesmente apoiada à qual se ligam a meio vão duas molas de rigidez k.

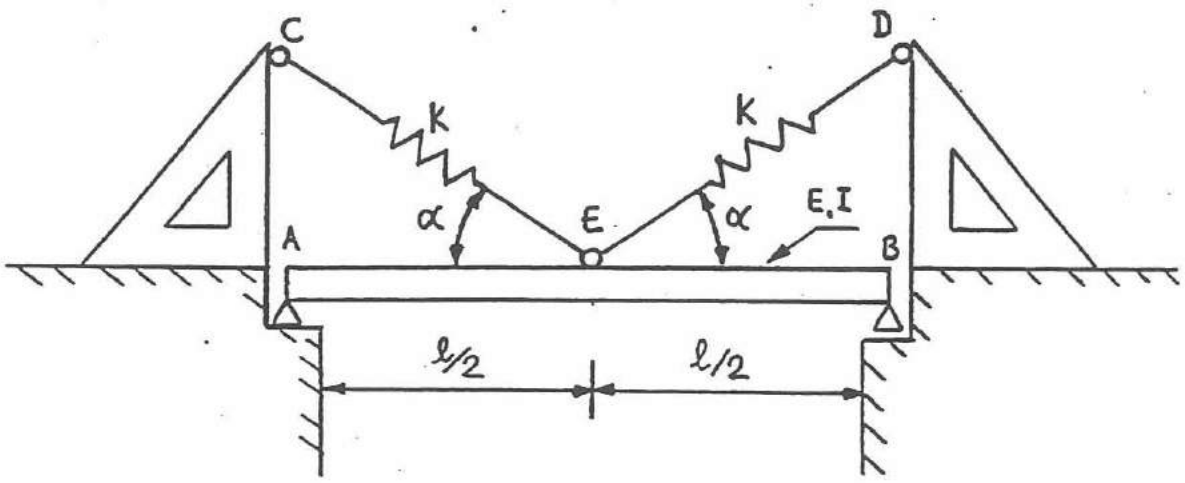
Pelo método da energia de Rayleigh e utilizando como aproximação da forma natural fundamental a deformada que se produziria sem as molas,

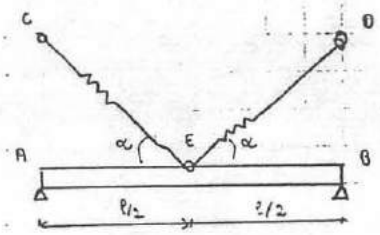
a) estimar a frequência fundamental de vibração.

b) Representar a variação da frequência fundamental em função do ângulo α.

c) Determinar e comparar os valores da frequência fundamental do sistema com e sem molas, respectivamente ω e ω_m, para os valores numéricos seguintes:

E= 2.1 Mbar	l=10 m	α= 30°
I= 9.64×10^{-4} m^4	$k = 1.82 \times 10^8$ N/m	$\rho A = 1.7 \times 10^3$ kg/m





a)

Aproximação da forma natural fundamental



$$V(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \operatorname{sen}\left(\pi \frac{x}{\ell}\right) = \delta \operatorname{sen}\left(\pi \frac{x}{\ell}\right)$$

Verificação das condições de fronteira geométricas

- $V(0) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 0 = 0$ ✓ → estão verificadas
- $V(\ell) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \pi = 0$ ✓

Energia potencial

$$U_{MAX_V} = \omega^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI \left(\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]$$

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -\delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)$$

$$U_{MAX_V} = \left[\frac{1}{2} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^4} \int_0^{\ell} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) dx \right] - \frac{1}{2} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^4} \left[\frac{\pi x}{2\ell} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right) \right]_0^{\ell} =$$

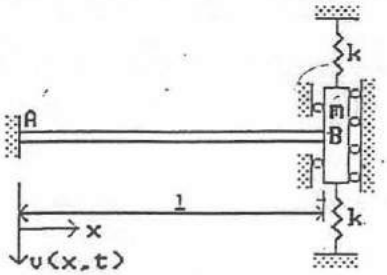
$$= \frac{1}{2} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} E \cancel{I} \frac{2}{\rho A \cancel{I}} \cdot \frac{\pi^5}{2\ell^4} = \left(\frac{E}{\rho A} \frac{\pi^5}{2\ell^4} \right)$$

Deformada de cada mola: $V_K(x) = \dfrac{V(x)}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\delta \operatorname{sen}\left(\pi \frac{x}{\ell}\right)}{\operatorname{sen}\alpha}$

$$U_K = \frac{1}{2} K V_K\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} K \frac{\delta^2 \operatorname{sen}^2 \pi/2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{2} K \frac{\delta^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\rightarrow U_{MAX} = \left(\frac{E}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\pi^5}{\ell^4} \right) + 2\alpha \frac{1}{2} K \frac{\frac{2}{\rho A l}}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2}{\rho A \operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{E}{\rho A l} \frac{\pi^5}{2\ell^4} =$$

$$= \frac{2}{1{,}7 \times 10^{-3} \cdot 0{,}25} + \frac{2{,}1 \times 10^6 \times 10^5}{1{,}7 \times 10^{-3} \times 9{,}64 \times 10^{-4}} \cdot \frac{\pi^5}{2 \cdot 10^4} = 63{,}2 \times 10^6$$



3) A figura representa uma viga de comprimento l, encastrada na extremidade A e com uma massa m concentrada na extremidade B. Para o movimento lateral v(x,t) da viga, a massa m é guiada numa translacção rectilínea e encontra-se ligada ao exterior por duas molas de rigidez k. A secção recta da viga apresenta uma área A e momento de inércia I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa específica ρ.

Utilizando o método da energia de Rayleigh,

a) Escolher, justificando a opção, uma das duas deformadas seguintes para aproximação da forma fundamental de vibração:

i) $V(x)=\delta\,(1-\cos\frac{\pi}{2l}x)$;

ii) $V(x)=\delta\,(1-\cos\frac{\pi}{l}x)$;

b) Determinar uma estimativa ω da frequência fundamental de vibração.

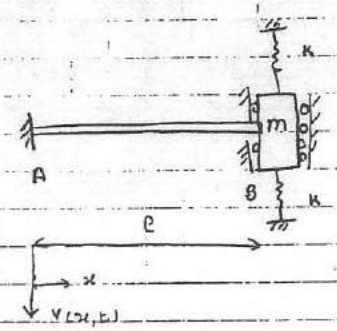
c) Comentar o resultado.

d) Discutir a validade da solução obtida para valores limite da rigidez k das molas.

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\delta\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos^2\frac{\pi}{l}x\,dx = \frac{1}{2}EI\left(\delta\frac{\pi}{l}\right)^2$$

IESTE AS 102/93

3.





(molas em série) ⇒



$K_{eq} = 2K$

a)

Condições de fronteira

$x = 0 \Rightarrow v(0,t) = 0$ ①

$\frac{dv(0,t)}{dt} = 0$ ②

$x = \ell \Rightarrow E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\ell,t) = 0$ $\quad \frac{dv(\ell,t)}{dx} = 0$ ③

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 v(\ell,t)}{\partial x^2} \right) = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\ell,t) + 2K v(\ell,t)$$

Condições de fronteira geométricas: ① e ② e ③

i) $v_1(0) = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi}{2\ell} \cdot 0\right) = 0$

$\frac{dv_1(0)}{dt} = \delta \frac{\pi}{2\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\ell} \cdot 0\right) = 0$

$\frac{dv_1(\ell)}{dt} = \delta \frac{\pi}{2\ell} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \neq 0$

ii) $v_2(0) = 0$

$\frac{dv_2(0)}{dt} = \delta \frac{\pi}{\ell} \operatorname{sen} 0 = 0$

$\frac{dv_2(\ell)}{dt} = \delta \frac{\pi}{\ell} \operatorname{sen}\pi = 0$

⇐ a deformada v_2 é a única que verifica as condições de fronteira geométricas

b)

Energia potencial máxima

$$U_{MAX} = U_K + U_V = K v(\ell)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{\ell}$$

1ª Questão

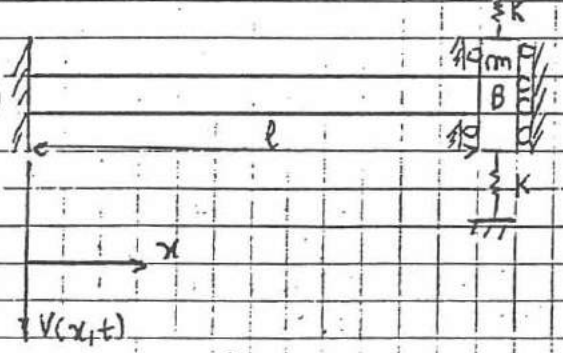
3) A figura representa uma viga de comprimento l, engastada na extremidade A e com uma massa concentrada na extremidade B. Para o movimento lateral $V(x,t)$ da viga, a massa m é guiada numa translação rectilínea e encontra-se ligada ao exterior por duas molas de rigidez k. A secção recta da viga apresenta uma área A e momento de inércia I. O material possui módulo de elasticidade E e massa específica ρ.

Utilizando o método de Energia de Rayleigh

a) Justifique, justificando a opção, uma das duas deformadas seguintes para aproximação da forma fundamental de vibração.

i) $V(x) = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi}{2l}x\right)$ (1)

ii) $V(x) = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi}{l}x\right)$ (2)



Tem que verificar as condições fronteira geométrica.

$V(0) = 0 \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$

(1): $V(0) = \delta(1 - \cos 0) = 0$ $\qquad \frac{\partial V'(x)}{\partial x} = +\frac{\delta\pi}{2l}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2l}x$

$\frac{\partial V(0)}{\partial x} = \frac{\delta\pi}{2l} x \operatorname{sen} 0 = 0$

$\frac{\partial V(l)}{\partial x} = \frac{\delta\pi}{2l}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2l} \times l\right) = \frac{\delta\pi}{2l}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\delta\pi}{2l} \neq 0$

(2) $V(0) = \delta(1 - \cos 0) = 0$ $\qquad \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{\delta\pi}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}x$

$\frac{\partial V(0)}{\partial x} = \frac{\delta\pi}{l}\operatorname{sen} 0 = 0$

$\frac{\partial V(l)}{\partial x} = \frac{\delta\pi}{l}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} \times l\right) = \frac{\delta\pi}{l}\operatorname{sen} 0 = 0$

A escolhida é a expressão (2) porque verifica as condições fronteira geométricas.

2. Determine uma aproximação à 1ª frequência fundamental de vibração.

$$V(x) = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi}{\ell}x\right)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \delta\frac{\pi}{\ell}\operatorname{sen}\frac{\pi}{\ell}x$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \delta\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\cos\frac{\pi}{\ell}x \qquad \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 = \delta^2\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\cos^2\frac{\pi}{\ell}x$$

$$V(x)^2 = \delta^2\left(1-\cos\frac{\pi}{\ell}x\right)^2$$

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI\left[\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right]^2 dx = \frac{1}{2}EI\int_0^\ell \delta^2\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\cos^2\frac{\pi}{\ell}x\,dx \quad \Leftarrow \text{Falta o } U_{max} \text{ das molas}$$

$$= \frac{1}{2}EI\,\delta^2\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\int_0^\ell \cos^2\frac{\pi}{\ell}x\,dx + \left(\right.$$

$$\int\cos^2\frac{\pi}{\ell}x = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\pi x/\ell)}{4\times\frac{\pi}{\ell}} + C = \frac{x}{2} + \frac{\ell}{4\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + C$$

$$* \frac{1}{2}EI\,\delta^2\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4\left[\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\ell}\times\ell\right) - \frac{0}{2} - \frac{\ell}{4\pi}\operatorname{sen}0\right] (=)$$

$$U_{max} = \frac{1}{2}EI\,\delta^2\left[\frac{\pi^4}{2\ell^3} + \frac{\pi^3}{4\ell^3}\right]$$

//

$$\frac{T_{max}}{\omega^2} = \frac{1}{2}\int_0^\ell \rho A\,V(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\rho A\int_0^\ell \delta^2\left(1-\cos\frac{\pi}{\ell}x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\rho A\,\delta^2\int_0^\ell\left(1-\cos\frac{\pi}{\ell}x\right)^2 dx \quad \Leftarrow \text{Falta o } T_{max} \text{ das massas}$$

$$\left(1-\cos\frac{\pi}{\ell}x\right)^2 = 1 - 2\cos\frac{\pi}{\ell}x + \cos^2\frac{\pi}{\ell}x$$

$$= K\int_0^\ell 1 - 2\cos\frac{\pi}{\ell}x + \cos^2\frac{\pi}{\ell}x\,dx =$$

$$K\left[x - 2\frac{\ell}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{\ell}x + \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\pi x/\ell)}{\frac{4\pi}{\ell}}\right]_0^\ell =$$

$$= \left(\ell - \frac{2\ell}{\pi}\operatorname{sen}\pi + \frac{\ell}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{\frac{4\pi}{\ell}} - 0 + \frac{2\ell}{\pi}\operatorname{sen}0 - \frac{0}{2} - \frac{\operatorname{sen}0}{\frac{4\pi}{\ell}}\right)K =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\ell\right)K = \frac{1}{2}\rho A\,\delta^2\times\frac{3}{2}\ell = \frac{3}{4}\rho A\,\delta^2\ell \;//$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2} EI \frac{1}{2} q^2 \left[\frac{\pi^4}{2l^3} + \frac{\pi^3}{4l^3}\right]}{\frac{3}{4} \rho A \frac{1}{2} q^2 l}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{EI}{\rho A} \left[\frac{\pi^4}{2l^4} + \frac{\pi^3}{4l^4}\right] = \frac{2}{3} \frac{EI}{\rho A} \left[\frac{2\pi^4 + \pi^3}{4l^4}\right]$$

$$= \frac{1}{6} \frac{EI}{\rho A} \left[\frac{2\pi^4 + \pi^3}{l^4}\right] \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{6\rho A}\left[\frac{2\pi^4 + \pi^3}{l^4}\right]} = 6.13 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

) Comentar o resultado.

A estimativa $\omega_1 = 6.13 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = 6.13 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$

Valor exacto $\omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$

A estimativa é inferior ao valor exacto porque temos que considerar a massa existente em B

) Discutir a validade da solução obtida para valores limite da rigidez k das molas

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}\right)\Big|_{x=l} = K\, v(x)\Big|_{x=l}$$

$$EI \left.\frac{\partial^3 v(x)}{\partial x^3}\right|_{x=l} = K\, v(x)\Big|_{x=l}$$

$$\frac{\partial^3 v(x)}{\partial x^3} = -\delta \left(\frac{\pi}{l}\right)^3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x$$

$$-\delta \left(\frac{\pi}{l}\right)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} \times l\right) = K \times \delta \times (1 - \cos \frac{\pi}{l} \times l)$$

$$= -\delta \left(\frac{\pi}{l}\right)^3 \operatorname{sen} \pi = K \times \delta (1 + 1) \Leftrightarrow 0 = K \times 2\delta$$

$K \to 0$ validade da solução verificada

$K \to \infty$ validade da solução não verificada

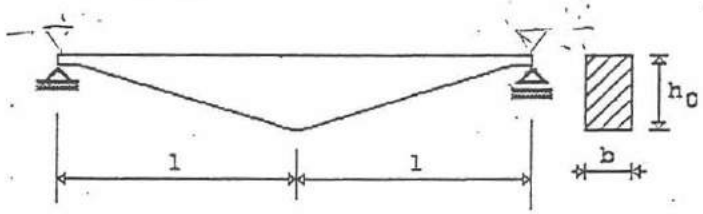
))))

3) A figura representa uma viga simplesmente apoiada, de comprimento 2l e de secção recta rectangular com altura variável. O material possui módulo de elasticidade E e massa específica ρ.

a) Determinar a frequência fundamental supondo a altura da seção recta constante e igual a $\frac{h_0}{2}$.

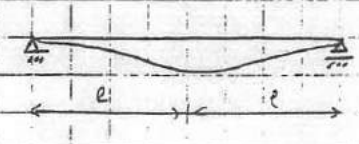
b) Pelo método da energia de Rayleigh, e utilizando como aproximação da forma fundamental a forma exacta de uma viga simplesmente apoiada de secção constante, determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração da viga.

c) Comparar os resultados obtidos nas alíneas a) e b) e indicar, justificando, qual deles constitui a melhor aproximação da frequência fundamental efectiva.



Nota: $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$.

3





a)

Equação do movimento (regime livre e vertical em uma viga):

$$c^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad \left(c^2 = \frac{EI}{\rho A} \right)$$

$$v(x,t) = V(x)\, g(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = \frac{d^4 V(x,t)}{dx^4} \cdot g(t)$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = V(x) \cdot \frac{\partial^2 g(t)}{dt^2}$$

$$\Downarrow$$

$$c^2 \frac{1}{V(x)} \frac{d^4 V(x,t)}{dx^4} = \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2}$$

Condições de fronteira:

$x = 0 \Rightarrow V(0,t) = 0$ ①

$\left.\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0$ ②

momento fletor nas extremidades nulos

$x = l \Rightarrow V(l,t) = 0$ ③

$\left.\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0$ ④

$$V(x) = A_1 \cosh \beta x + A_2 \operatorname{senh} \beta x + A_3 \cos \beta x + A_4 \operatorname{sen} \beta x$$

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = A_1 \beta^2 \cosh \beta x + A_2 \beta^2 \operatorname{senh} \beta x - A_3 \beta^2 \cos \beta x - A_4 \beta^2 \operatorname{sen} \beta x$$

① $A_1 + A_3 = 0 \quad \Rightarrow A_1 = A_3 = 0$

② $A_1 - A_3 = 0$

③ $A_2 \operatorname{senh} \beta l + A_4 \operatorname{sen} \beta l = 0 \quad \Rightarrow A_2 = 0 \Rightarrow A_4 \operatorname{sen} \beta l = 0$

④ $A_2 \operatorname{senh} \beta l - A_4 \operatorname{sen} \beta l = 0 \quad \Rightarrow A_2 = 0 \Rightarrow A_4 \operatorname{sen} \beta l = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \beta l = 0}$

EQ. CARACTERÍSTICA OU DE FREQUÊNCIAS

Raízes da eq de frequências:

$\beta_n \ell = n\pi$ $\quad n = 1, 2, \ldots, \infty$ $\quad \Rightarrow \beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A}{EI}\omega^2$

Freq. fundamental: $\omega_1^2 = (\beta\ell)^4 \frac{EI}{\rho A \ell^4} = n^4\pi^4 \frac{EI}{\rho A \ell^4}$

$\omega_1 = n^2\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} \Rightarrow V_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho A \ell}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell_T} x\right)$ $\quad \delta$

L_T = comprim total do viga = 2ℓ

b)

Energia potencial máxima:

$$U_{MAX} = U_V = \frac{1}{2}\int_0^{2\ell} EI(x) \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx$$

$I(x) = \frac{b h^3(x)}{12} \Rightarrow 0 \le x \le \ell \quad I(x) = \frac{b h_0^3}{12\ell^3} \cdot x^3$

$\ell \le x \le 2\ell \quad I(x) = \frac{b}{12}\cdot\left(h_0 - \frac{h_0}{\ell}x\right)^3$

$\frac{dV(x)}{dx} = \delta \frac{\pi}{\ell_T}\cos\left(\frac{\pi}{\ell_T}x\right) \quad ; \quad \frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\delta\left(\frac{\pi}{\ell_T}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell_T}x\right)$

$$U_{MAX} = \frac{1}{2}E\left\{\int_0^{\ell} \frac{b h_0^3}{12\ell^3} x^3 \left(\delta^2\left(\frac{\pi}{\ell_T}\right)^4 \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{\ell_T}x\right) dx + \int_{\ell}^{2\ell} \frac{b}{12}\left(h_0 - \frac{h_0}{\ell}x\right)^3 \delta^2\left(\frac{\pi}{\ell_T}\right)^4 \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{\ell_T}x\, dx\right.$$

$$= \frac{1}{2}E\delta^2 \frac{b h_0^3}{12\ell^3}\delta^2\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^4 \left\{\int_0^{\ell} x^3 \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2\ell}x\, dx + \int_{\ell}^{2\ell}(\ell - x)^3 \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2\ell_T}x\, dx\right\}$$

$$\int x^3 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2\ell}x\right) dx = \frac{1}{2}\int x^3\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)\right] dx = \frac{1}{2}\int x^3 dx - \frac{1}{2}\int x^3 \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) dx$$

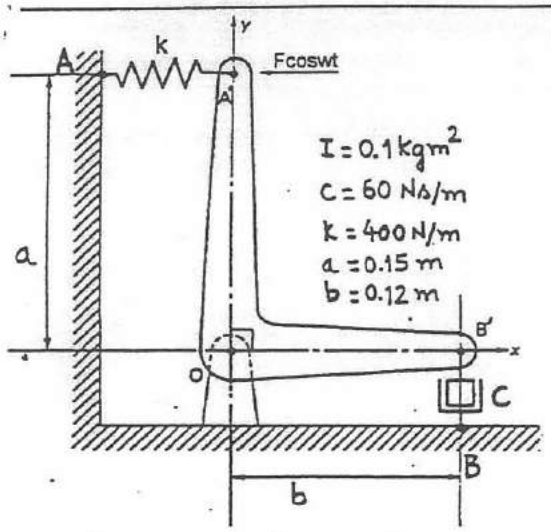
$$\frac{1}{2} = \frac{x^4}{8} - x^3\left(\frac{\ell}{\pi}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)\int x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) dx =$$

$$= \frac{x^4}{8} - x^3\left(\frac{\ell}{\pi}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) - \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 x^2 \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \int x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) dx =$$

$$= \frac{x^4}{8} - x^3\left(\frac{\ell}{\pi}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) - \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 x^2 \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^3 x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^4 \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)$$

Para $x = \ell \Rightarrow \quad \frac{\ell^4}{8} + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \ell^2 - \frac{\ell^4}{\pi^4} = \ell^4\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^4}\right) = 0{,}216\,\ell^4$

- Para $x = 0 \Rightarrow \quad \frac{\ell^4}{\pi^4} \Rightarrow \int_0^{\ell} \ldots dx = 0{,}2057\,\ell^4 \times \frac{1}{2}$



1) Um componente mecânico em forma de L, conforme representado na figura, oscila em torno do ponto O e possui um momento de inércia I em relação a um eixo perpendicular ao plano da figura e que passa por O. O componente está ligado ao exterior através de uma mola de rigidez k, no ponto A', e de um amortecedor de coeficiente de amortecimento c, no ponto B'.

No ponto A', e na direcção horizontal, está aplicada uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$.

Considerando que na posição de equilíbrio estático a direcção OA' coincide com a vertical, determinar:

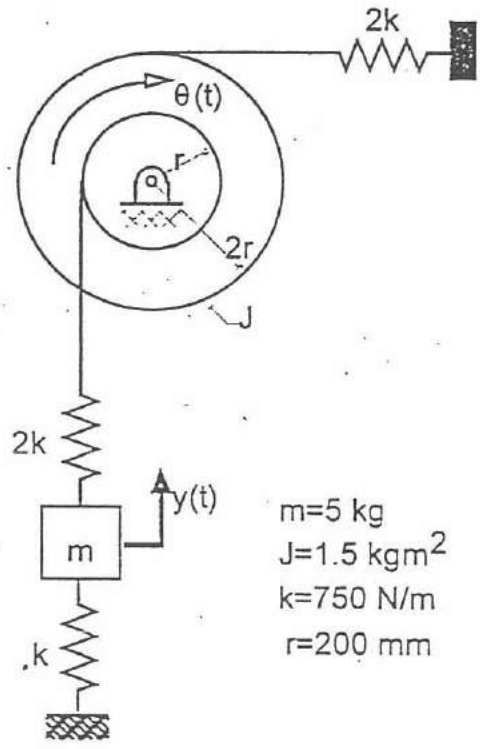
a) a equação do movimento do sistema;

b) razão de amortecimento ξ;

c) a frequência natural angular amortecida ω_c e o respectivo período T_c;

d) a resposta do sistema para uma solicitação harmónica de amplitude igual a 50 N e frequência igual a 3 Hz;

e) as forças transmitidas aos apoios A e B para a solicitação da alínea anterior.



2) O sistema vibratório representado na figura tem dois graus de liberdade e é não amortecido.

A posição da massa m é referenciada pela coordenada linear y(t) e a posição do disco é referenciada pela coordenada θ(t). Ambas as coordenadas são referidas à posição de equilíbrio estático do sistema.

a) Determinar as equações do movimento do sistema;

b) Escrever as equações do movimento na forma matricial calculando os respectivos termos;

c) Determinar as frequências naturais de vibração.

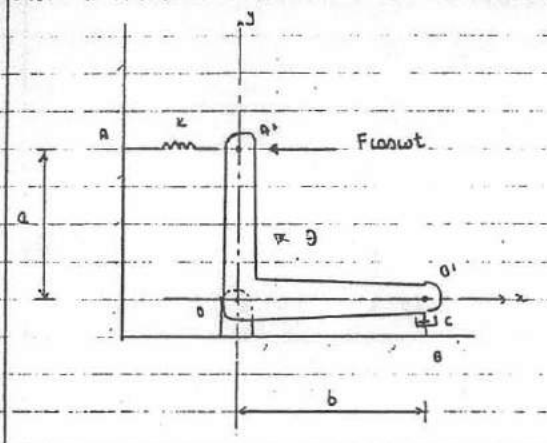
d) Determinar e representar as formas naturais de vibração.

Admitindo que sobre o disco actua um momento $M(t)=M_0\sin\omega t$,

e) Exprimir as equações do movimento na base modal.

f) Determinar, por sobreposição modal, a resposta estacionária do sistema.

1.

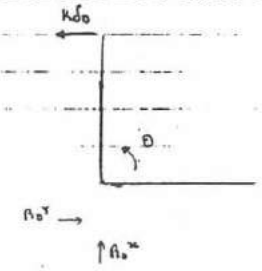


$I = 0,1\ Kgm^2$
$C = 60\ Ns/m$
$K = 400\ N/m$
$a = 0,15\ m$
$b = 0,12\ m$

c)

Equação do movimento do sistema

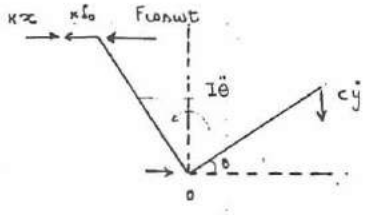
- Diag. de equilíbrio do sistema na posição de equilíbrio estático



$A_o^x = K\delta_o$
$A_o^y = 0$

- nº de graus de liberdade : 1 , θ , positivo

- Diag. de eq. do sistema na posição de eq. dinâmico



$\Sigma M_O = J\ddot{\theta}$

$-Kx\,\text{sen}\theta \cdot a\cos\theta + F\text{const}\cdot a\cos\theta - cb\dot{\theta}\cos\theta \cdot b\cos\theta = I\ddot{\theta}$

$I\ddot{\theta} + Ka^2\,\text{sen}\theta\cos\theta + cb^2\dot{\theta}\cos^2\theta = a\cos\theta\, F\text{const}$

$y = b\,\text{sen}\theta \qquad x = a\,\text{sen}\theta$
$\dot{y} = b\dot{\theta}\cos\theta$

Para pequenas oscilações : $\cos\theta \simeq 1$, $\text{sen}\theta \simeq \theta$

$I\ddot{\theta} + b^2c\dot{\theta} + a^2K\theta = aF\text{const}$ ⇒ EQ. DO MOVIMENTO

$J_{eq} = I = 0,1\ Kgm^2$
$c_{eq} = b^2c = 0,12^2 \cdot 60 = 0,864\ Nsm$
$K_{eq} = a^2K = 0,15^2 \cdot 400 = 9\ N/m$

$\Rightarrow$ $\boxed{0,1\ddot{\theta} + 0,864\dot{\theta} + 9\theta = 0,15F\text{const}}$

b)

Razão de amortecimento ζ

- amortecimento crítico $\quad C_c = 2\sqrt{k_{eq} m_{eq}} = 2\cdot\sqrt{9\cdot 0{,}1} = 1{,}9$

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{C_c} = \frac{0{,}864}{1{,}9} = 0{,}455$$

c)

Frequência natural angular amortecida ω_d e o período T_d

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{J_{eq}}\cdot(1-\zeta^2)} = \sqrt{\frac{9}{0{,}1}\cdot(1-0{,}455^2)} = 8{,}45 \text{ rad/s} \quad (\omega_n = 9{,}5 \text{ rad/s})$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{8{,}45} = 0{,}74 \text{ s}$$

d)

Resposta do sistema para $\quad F = 50\cos(2\pi\cdot 30t) = 50\cos(60\pi t)$

Eq. do movimento: $\quad 0{,}1\ddot{\theta} + 0{,}864\dot{\theta} + 9\theta = 7{,}5\cos(60\pi t)$

Resposta total: $\quad \theta(t) = e^{-\zeta\omega_n t}[A_1\cos\omega_d t + A_2\operatorname{sen}\omega_d t] + \frac{F}{\kappa}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}\cos(\omega t - \phi)$

condições iniciais: $\quad \theta(0) = 0$

$\dot{\theta}(0) = 0$

- Resposta permanente: $\quad F = 7{,}5$

$\kappa = 0{,}864$

$\beta = 60\pi / 9{,}5 = 19{,}8 \Rightarrow \omega \gg \omega_n \Rightarrow \phi \approx \pi$

$\theta_p(t) = 0{,}0015\cos(60\pi t - \pi) = -0{,}0015\cos(60\pi t)$

Resposta

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{60\pi}{}$

$f = \frac{1}{T} \quad T = \frac{1}{3}$

Teste de 94-01-26
Parte prática (12 valores)

1) O rotor de um instrumento de medida é controlado por uma mola de torção e um amortecedor viscoso de rotação montados nas suas extremidades.

A massa do rotor é de 50×10^{-3} Kg e o seu raio de giração em relação ao seu eixo de rotação é de 12×10^{-3} m.

Quando posto a vibrar, o rotor realiza uma oscilação completa em 4.2 s, sendo a razão entre duas amplitudes consecutivas de 169/3.

Determinar:

a) a razão de amortecimento ξ;

b) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

c) a rigidez k_t da mola de torção;

d) a constante c de amortecimento viscoso de rotação.

Se o rotor, inicialmente em repouso, receber um impulso que lhe provoca uma rotação máxima de 25°, determinar:

e) o tempo que demorou a rodar 25°;

f) a velocidade angular inicial provocada pelo impulso;

g) a energia fornecida pelo impulso.

2) O sistema representado na figura é constituído por:

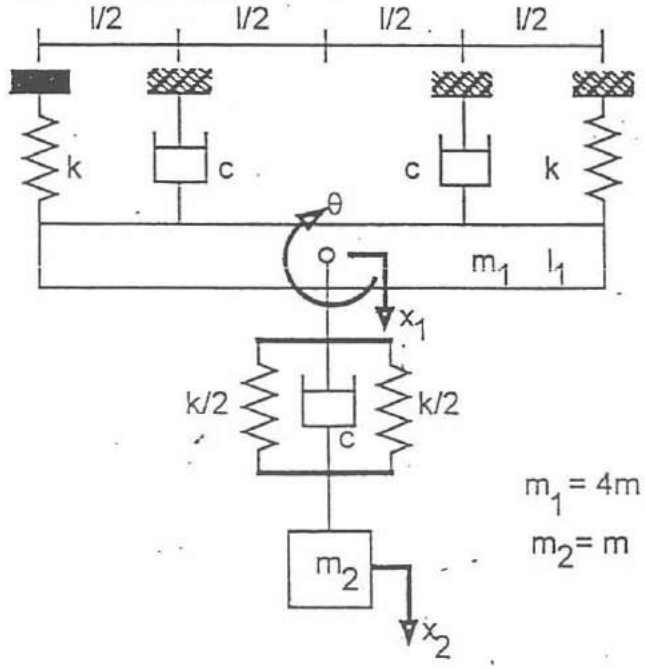
- uma barra de comprimento 2l, suspensa de 2 molas de rigidez k e de 2 amortecedores de tipo viscoso de constante c, com 2 graus de liberdade (translacção $x_1(t)$ e rotação $\theta(t)$ do centro de massa);
- uma massa m_2 suspensa da barra por um conjunto mola-amortecedor.

Determinar:

a) As equações do movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange;

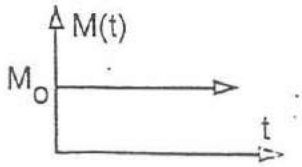
b) As frequências e formas naturais de vibração do sistema não amortecido;

c) A resposta do sistema amortecido para a solicitação M(t) representada na figura e actuando segundo a coordenada generalizada $\theta(t)$.



$m_1 = 4m$

$m_2 = m$



2.a) Sistema amortecido
3, Vibrações lateral?
Tmassa = ?
Condições iniciais nulas

TESTE 26.01.94 PARTE PRÁTICA

1.

a)

Razão de amortecimento ξ

Equação do movimento: $J_{eq}\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + K_t\theta = 0$

$J_{eq} = m\,g^2 = 50\times10^{-3} \times 12\times10^{-3}\ m = 6\times10^{-4}\ m$

Razão entre 2 amplitudes consecutivas $\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{16,9}{3}$

Decremento logarítmico $\Rightarrow \delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{16,9}{3} = 4,031$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \frac{4,031}{\sqrt{4\pi^2+4,031^2}} = 0,540$$

b)

Frequência natural angular não amortecida ω_n

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{4,2\cdot\sqrt{1-0,54^2}} = 1,78\ \text{rad/s}$$

c)

Rigidez K_t da mola de tricas

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{J_{eq}}} \Rightarrow K_t = \omega_n^2 \cdot J_{eq} = 1,78^2 \cdot 6\times10^{-4} = 1,9\times10^{-3}\ \text{N/m} \simeq 2\times10^{-3}\ \text{N/m}$$

d)

constante c de amortecimento viscoso de estrias

$$\xi = \frac{c}{c_c} \Rightarrow c = \xi c_c = \xi \cdot 2\cdot\sqrt{K_t J_{eq}} = 2\times0,540\times\sqrt{2\times10^{-3}\times6\times10^{-4}} = 1,18\times10^{-3}\ \text{Ns}$$

e)

tempo que demora a atingir 25°

$\theta_{max} = 25° \Rightarrow \frac{d\theta(t)}{dt} = 0$

Movimento subsequente à aplicação do impulso é o de vibração livre ou natural do sistema c/ condições iniciais:

$\theta_0 = 0$

$\dot{\theta}_0 = \frac{M'}{I}$

$\Rightarrow$ Resposta ao impulso: $\theta(t) = \frac{M'}{I\omega_c} e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen}\omega_c t$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{M^*}{J\,\omega_c}\left[-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_c t + \omega_c e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_c t\right] =$$

$$= \frac{M^*}{I\cdot\omega_c} e^{-\zeta\omega_n t}\left[-\zeta\omega_n \operatorname{sen}\omega_c t + \omega_c \cos\omega_c t\right] = 0$$

$\zeta\omega_n = 0{,}54 \times 1{,}78 = 0{,}96$

$\omega_c = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1{,}78\cdot\sqrt{1-0{,}54^2} = 1{,}50$ rad/s

$$\Rightarrow \left\{-0{,}96\,\operatorname{sen}(1{,}50t) + 1{,}50\cos(1{,}50t) = 0\right\}$$

Recorrendo ao método de Newton: $t = 0{,}667$ s $\simeq 0{,}7$ s

f)

Velocidade angular inicial

$\theta(0{,}667) = 25°$ $\Rightarrow 25 \times \frac{\pi}{180} = \frac{M^*}{I\cdot 1{,}50} \cdot e^{-0{,}96\times 0{,}667} \cdot \operatorname{sen}(1{,}50\times 0{,}667)$

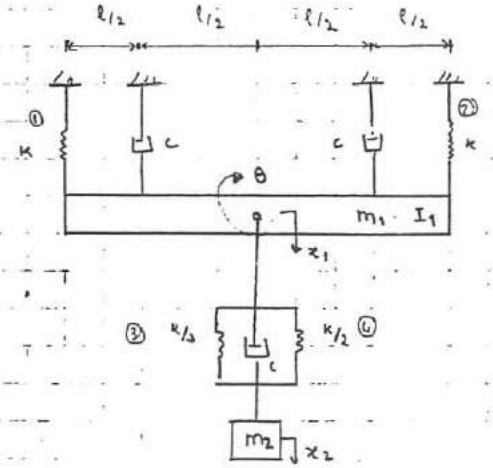
$\Rightarrow \dot{\theta}_0 = \frac{M^*}{I} = 1{,}475$ rad/s $\simeq 1{,}5$ rad/s

g)

Energia fornecida pelo impulso

$E_i = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_i^2 = 0{,}5\times 6\times 10^{-4} \times 1{,}475^2 = 6{,}5\times 10^{-4}$ J

2.



$m_1 = 4m$

$m_2 = m$

a)

Equações do movimento utilizando o formalismo de Lagrange

Energia cinética $T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

Energia potencial : $U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \frac{1}{2} k(x_1 - \theta l)^2 + \frac{1}{2} k(x_1 + \theta l)^2 + 2 \times \frac{1}{2} \frac{k}{2} (x_1 - x_2)^2 =$

$$= \frac{1}{2} k (x_1 - \theta l)^2 + \frac{1}{2} k (x_1 + \theta l)^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

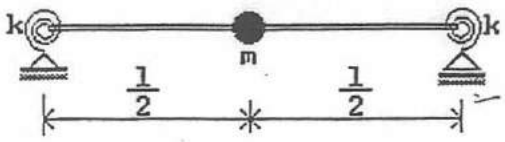
Função de dissipação de Rayleigh : $F = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} c_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2} c \dot{\theta} \dot{x}_1 + \frac{1}{2} c \theta \dot{x}_1 + \frac{1}{2} c \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} c \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} c \dot{x}_2 \dot{\theta}$$

[θ] $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = J_1 \ddot{\theta}$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -l k (x_1 - \theta l) + l k (x_1 + \theta l) = 2 l^2 k \theta$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} = c \dot{x}_1 + c \dot{\theta}$$



3) Uma viga de comprimento l, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, está apoiada sobre duas molas elásticas de rigidez rotacional k, conforme se representa na figura, e suporta a meio vão uma massa m.

Pelo método da energia de Rayleigh, e utilizando como aproximação da forma fundamental de vibração, a forma fundamental exacta de uma viga simplesmente apoiada,

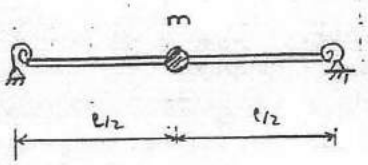
a) verificar a aplicabilidade desta aproximação ao problema;

b) determinar a estimativa da frequência fundamental de vibração;

c) comentar o resultado e discutir a sua validade para os valores limite da rigidez K.

d) Estabelecer uma "melhor" aproximação para a forma fundamental dada pela sobreposição da fo. fundamental exacta da viga simplesmente apoiada e da deformada devida às molas.

5.



a)

→ Determinação da forma fundamental exacta de uma viga simplesmente apoiada:

$$V(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho A \ell}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) = \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)$$

Tem de verificar as condições de fronteira geométricas:

① $V(0) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 0 = 0$ ✓

② $V(\ell) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \pi = 0$ ✓

b)

Energia potencial máxima:

$$U_{MAX} = U_V = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right) dx$$

$$T^n = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(V(x) \cdot \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}\right)^2 \Big|_{\ell/2} = \frac{1}{2} m \omega^2 V^2 \left(\frac{\ell}{2}\right)_{máx}$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \delta \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)$$

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\delta \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)$$

$$U_{MAX} = \frac{1}{2} EI \delta^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \int_0^\ell \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} EI \delta^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \left\{ \ell - \int_0^\ell \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} x\right) dx \right\} = \frac{1}{4} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^3}$$

← FALTA U_{MOLAS}

Energia cinética máxima:

$$T_{MAX} = T^V + T^M = \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A V^2(x) dx + \frac{1}{2} m \omega^2 \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \delta^2 \left\{ \rho A \int_0^\ell \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) dx + m \right\} = \frac{1}{2} \omega^2 \delta^2 \left\{ \rho A \int_0^\ell \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)\right) dx + m \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \delta^2 \left\{ \frac{1}{2} \rho A \ell + m \right\}$$

$$U_{MOLAS} = \frac{1}{2} k \cdot \left(\frac{dV(0)}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} k \cdot \left(\frac{dV(\ell)}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2} k \delta^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot \left[\cos^2 0 + \cos^2 \pi\right] =$$

$$= k \delta^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{4} EI \delta^2 \cdot \frac{\pi^4}{l^3} + K \delta^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{\frac{1}{2}\delta^2 \cdot \left\{\frac{1}{2}\rho A l + m\right\}} = \frac{\frac{\pi^4}{l^3} EI + 4K\frac{\pi^2}{l^2}}{\rho A l + 4m}$$

c)

$K \to 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\frac{\pi^4}{L^3} EI}{\rho A l + 4m} \div \frac{\pi^4 EI}{\rho A L^4 + 4mL^3}$

$\Rightarrow$ tende para a situação de uma viga simplesmente apoiada que suporta a meio vão uma carga m



$K \to \infty \quad \omega \to \infty$

d)

Forma da terceira modal =

$M_t = K \theta(x,t)$

1) A figura representa o mecanismo de uma balança de pratos. O braço e os pratos da balança formam um corpo rígido, de momento de inércia J em relação ao eixo de rotação que passa pelo ponto O, e que está ligado ao exterior por 2 molas elásticas de rigidez k= 5 kN/m e por 2 amortecedores de tipo viscoso e de constante c. O deslocamento angular a partir da posição de equilíbrio estático é referenciado pela coordenada θ(t).

Após uma perturbação inicial, verificou-se que a razão entre a 3ª e a 5ª oscilações é de $7.3 \times 10^9/1$, e o período de oscilação é de 0.162 s.

a) Escrever a equação de movimento do sistema.

Determinar:

b) a razão de amortecimento ξ;

c) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

d) o momento de inércia J do mecanismo;

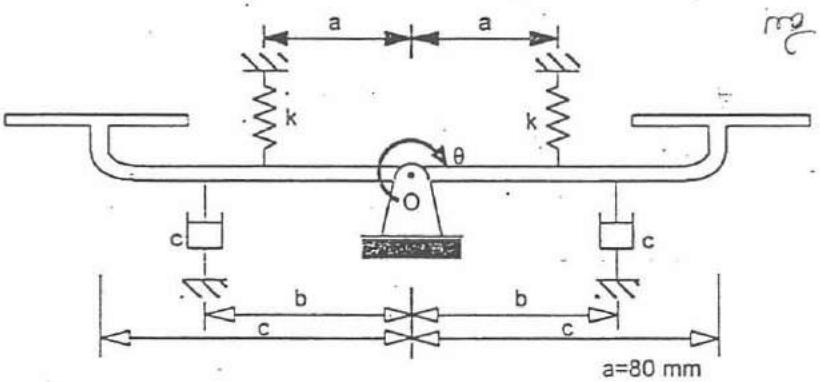
e) a constante c de amortecimento.

Supondo que uma massa de 5 kg é colocada quasi-estaticamente sobre um dos pratos da balança,

f) escrever a nova equação de movimento do sistema;

g) esboçar, graficamente, a resposta do mecanismo.

h) Calcular o valor máximo da rotação θ(t).



a=80 mm
b=100 mm
c=150 mm

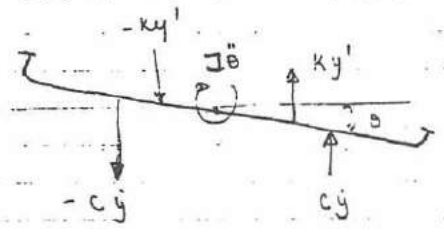
EXAME 07.02.94

1.

a)

Equação do movimento do sistema

Diag. de cp. na direção do cp. dinâmico:



$y = b \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \dot{y} = b\dot{\theta}\cos\theta \cdot b\dot{\theta}$

$y' = a \operatorname{sen}\theta = a\theta$

$-I\ddot{\theta} = (cb\dot{\theta})\cdot b\cos\theta + (cb\dot{\theta})b\cos\theta + (ka\theta)\cdot a\cos\theta + (ka\theta)a\operatorname{sen}\theta$ (ky: variável)

$$\underbrace{I\ddot{\theta}}_{I_T} + \underbrace{2cb^2\dot{\theta}}_{c_T} + \underbrace{2ka^2\theta}_{K_T} = 0$$

b)

Decremento logarítmico: $\delta = \frac{1}{2}\ln\frac{x_1}{x_5} = \frac{1}{2}\ln(7{,}3\times10^3) = 11{,}356$

Razão de amortecimento: $\zeta = \frac{11{,}356}{\sqrt{4\pi^2 + 11{,}356^2}} = 0{,}875$

c)

Freq. natural amortecida: $w_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}162} = 38{,}8$ rad/s

Freq. natural não amortecida: $w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{38{,}8}{\sqrt{1-0{,}875^2}} = 80{,}1$ rad/s

d)

$J = K_T \cdot w_n^2 = 2ka^2 \cdot w_n^2 = \overbrace{2\times5\times0{,}08^2}^{0{,}064\times10^3} \times 80{,}1^2 = 410{,}8\times10^3$ Kgm²

e)

$c_T = \zeta \cdot \sqrt{2K_T \cdot J} = 0{,}875 \cdot \sqrt{2\times0{,}064\times10^3 \cdot 410{,}8\times10^3} = 6345$ N/rad

$c = \frac{c_T}{2b^2} = \frac{6345}{2\cdot0{,}1^2} = 317\times10^3$ Kg/s

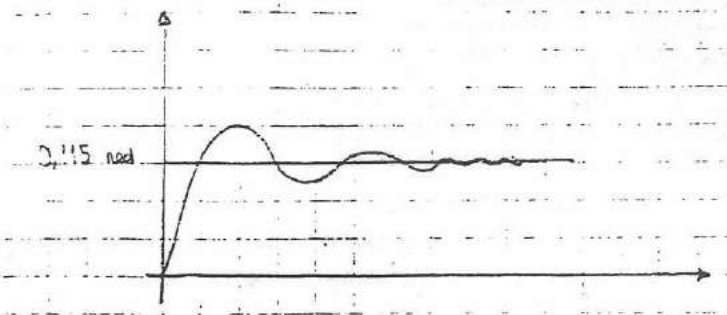
f)

$I\ddot{\theta} + 2cb^2\dot{\theta} + 2ka^2\theta = mg\cdot L$ ⇒ função de forçamento

$410{,}8\,\ddot{\theta} + 6345\,\dot{\theta} + \ldots\,\theta = 735\,u(t)$

g)

Resposta do mecanismo (resposta à função degrau)



$$\psi = tg^{-1}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 1,065 \text{ rad}$$

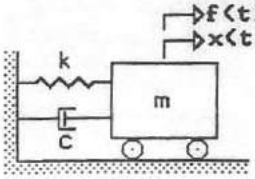
h)

$$\theta(t) = 2,115 \cdot \left[1 - 2,066 \cdot e^{-70,09t} \cdot \cos\left(38,8t - 1,065\right)\right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = 144,8\, e^{-70,09t} \cos(38,8t - 1,065) + 80,16\, e^{-70,09t} \operatorname{sen}(38,8t - 1,065)$$

$$0 = 144,8 \cos(38,8t - 1,065) + 80,16 \operatorname{sen}(38,8t - 1,065)$$

$\Rightarrow t =$ (método iterativo)



1) O comportamento vibratório do sistema com um grau de liberdade representado na figura é descrito pela equação: $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$.

a) Estabelecer a equação característica ou de frequência.

b) Discutir a natureza das raízes da equação característica e o tipo de movimento em função do valor da razão de amortecimento ξ.

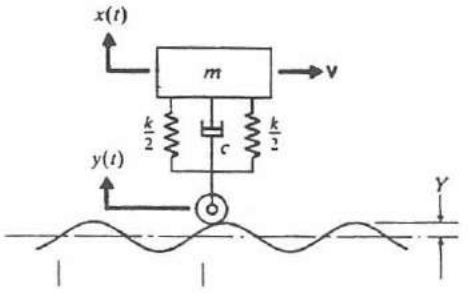
c) Indicar duas técnicas para calcular o regime forçado x(t) do sistema quando este é sujeito a uma excitação f(t) não-periódica. Em que condições específicas se utiliza uma e outra?

2) Os transdutores de vibração permitem medir o deslocamento ou a aceleração do estado vibratório de um sistema mecânico.

a) indicar quais os elementos constituintes de um transdutor de vibrações;

b) Representar as características de transmissibilidade e indicar as gamas de frequência de funcionamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

c) Caracterizar, justificando, relativamente ao atravancamento, os transdutores de deslocamento e de aceleração.



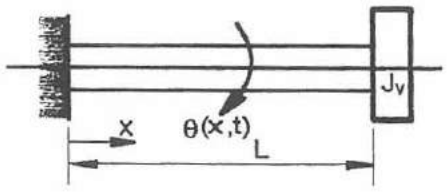
3) O equipamento representado na figura desloca-se com uma velocidade v sobre um piso ondulado de comprimento de onda λ.

a) Caracterizar o movimento vibratório do equipamento.

b) Representar a amplitude do movimento x(t) da massa m em função da velocidade de deslocamento. Indicar na figura eventuais pontos singulares.

c) Representar a amplitude F da força transmitida à massa m em função da velocidade de deslocamento. Indicar na figura eventuais pontos singulares.

d) Estabelecer uma expressão genérica para a resposta x(t) se, em vez da superfície ondulada, o sistema encontar um degrau, isto é, $y(t)=-Y_0\mu(t)$.

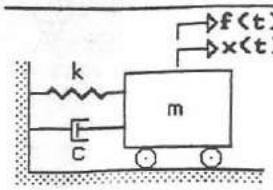


4) Na figura representa-se um veio em torção, de comprimento L, com uma extremidade fixa e com um volante indeformável na outra extremidade. A secção recta do veio apresenta área A e momento polar de 2ª ordem I_p. O material possui módulos de elastidade longitudinal e transversal, respectivamente, E e G, e ainda uma massa específica ρ. O volante possui um momento polar de inércia J_v.

a) Estabelecer a equação de vibração de torção.

b) Estabelecer as condições de fronteira.

c) Demonstrar que a equação admite soluções de variáveis separadas do tipo $\theta(x,t) = \Theta(x)g(t)$.



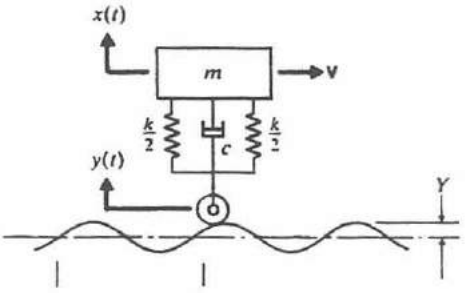
1)O comportamento vibratório do sistema com um grau de liberdade representado na figura é descrito pela equação: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)$.

a) Definir decremento logarítmico do sistema.

b) Definir frequência de batimento do sistema.

c) Representar graficamente, e lado a lado, a solicitação f(t)=Fsinωt e a resposta estacionária x(t) do sistema, para as seguintes situações:

i) $\omega<<\omega_n$ ii) $\omega=\omega_n$ iii) $\omega>>\omega_n$



2) O equipamento representado na figura desloca-se com uma velocidade v sobre um piso ondulado de comprimento de onda λ.

a) Caracterizar o movimento vibratório do equipamento.

b) Representar a amplitude do movimento x(t) da massa m em função da velocidade de deslocamento. Indicar na figura eventuais pontos singulares.

c) Representar a amplitude F da força transmitida à massa m em função da velocidade de deslocamento. Indicar na figura eventuais pontos singulares.

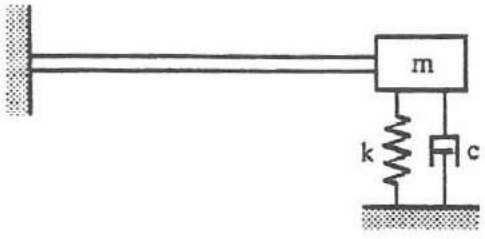
d) Discutir a transmissibilidade absoluto em função dos parâmetros k e c e da velocidade de rotação. Acompanhar a discussão com gráficos ilustrativos.

3) Para estimar a frequência fundamental de vibração de um sistema, o quociente de Rayleigh constitui uma técnica bastante prática.

a) Indicar a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh.

b) Estabelecer um "paralelo" entre as aproximações utilizadas no quociente de Rayleigh para sistemas lineares discretos e sistemas contínuos.

c) Escrever as expressões genéricas do quociente de Rayleigh para sistemas lineares discretos e sistemas contínuos.



4) A viga representada na figura, de comprimento l, está encastrada numa extremidade, e na outra extremidade possui uma massa sem inércia de rotação apoiada numa mola linear elástica e num amortecedor viscoso. A secção recta da viga apresenta área A e momento de inércia I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa específica ρ.

a) Escrever a equação da vibração de flexão da viga e respectivas condições de fronteira.

b) Indicar, justificando, as condições a verificar por uma deformada genérica V(x), aproximação da forma fundamental de vibração lateral (de flexão) da viga, a utilizar no método da energia de Rayleigh.

FEUP-Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

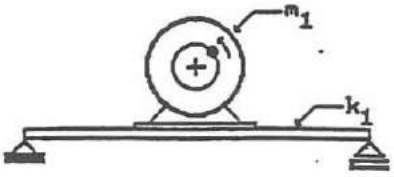
VIBRAÇÕES

Exame especial de 13.12.91
Parte teórica (6 valores)

1) Discutir a influência da razão de amortecimento ξ sobre a transmissibilidade de força $TR=\frac{F_T}{F}$ de um sistema com transmissão activa. Apoiar a discussão com um gráfico representativo.

2) Para um sistema com um grau de liberdade, estabelecer a expressão da resposta x(t) a uma solicitação arbitrária f(t), a partir da função de resposta impulsiva h(t). Referir eventuais hipóteses ou princípios utilizados.

3) Um motor de massa m_1 assenta sobre uma suspensão elástica não amortecida de rigidez k_1 (viga simplesmente apoiada). Verifica-se que a velocidade de funcionamento ω do motor corresponde à frequência natural ω_n do sistema, provocando uma vibração violenta de elevada amplitude.



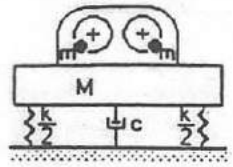
Como proceder para atenuar ou eliminar a vibração do motor, sem, no entanto, alterar as características k_1, m_1 e a velocidade de funcionamento? Justificar, sucintamente, a solução adoptada.

4) Os vectores modais de um sistema linear discreto não amortecido possuem uma importante propriedade.

a) Indicar e demonstrar essa propriedade.

b) Qual a utilidade prática dessa propriedade?

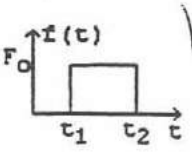
1) Representar e justificar, do ponto de vista físico, a variação do factor de amplificação dinâmica μ em função da frequência ω para diferentes valores da razão de amortecimento ξ.



2) O funcionamento do equipamento representado na figura é acompanhado de vibrações de grande amplitude. A análise do sistema mostra que a velocidade de funcionamento do sistema é bastante próxima da frequência de ressonância de amplitude.

a) Qual a alteração adequada para a rigidez da suspensão de modo a melhorar o comportamento do sistema ?

b) Discutir a eficiência do isolamento em função dos parâmetros M, k e c para uma determinada frequência de funcionamento. Acompanhar a discussão com gráficos.



3) Escrever, em termos da função de solicitação f(t) e da função de resposta impulsiva h(t), a resposta x(t) de um sistema vibratório para a solicitação representada na figura.

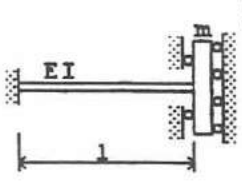
4) Para estimar as frequências naturais de vibração de um sistema, o quociente de Rayleigh constitui um método bastante prático.

a) Escrever a expressão do quociente de Rayleigh para um sistema linear discreto com n graus de liberdade indicando o significado físico de cada um dos termos.

$$r = \frac{\{v\}^T[k]\{v\}}{\{v\}^T[m]\{v\}}$$

b) Indicar eventuais propriedades do quociente de Rayleigh e justificar a sua aplicação em análise de vibrações.

c) Caracterizar o quociente de Rayleigh para um vector arbitrado {v} que verifica a relação $\{v\}^T[m]\{u\}_1 = 0$.



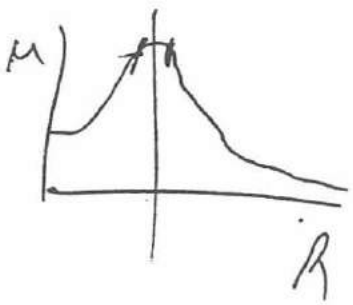
5) A figura representa uma viga encastrada numa extremidade e com uma massa m concentrada na outra extremidade. Para o movimento lateral v(x,t) da viga, a massa m é guiada numa translacção rectilínea.

Escrever as condições de fronteira (geométricas e naturais) da viga.

$$V(0,t) = 0$$

$$\frac{dV}{dx}(0,t) = 0$$

$$V(l,t) = c$$

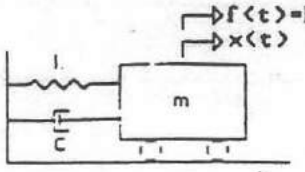


PEUP-Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

VIBRAÇÕES

Teste de 04.02.92

Parte teórica (8 valores)



1) O comportamento vibratório do sistema com um grau de liberdade representado na figura, sujeito a uma solicitação harmónica de amplitude F e frequência ω, é descrito pela equação: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F\sin\omega t$.

a) Esboçar a resposta permanente ou estacionária do sistema com uma razão de amortecimento $\xi \neq 0$ nas seguintes situações: i) $\omega < \omega_n$; ii) $\omega > \omega_n$.

b) Esboçar a resposta permanente do sistema para $\omega=\omega_n$ nas seguintes condições: i) $\xi=0$; ii) $\xi\neq 0$.

c) Representar a amplitude da força transmitida ao apoio em função da razão de frequências β para diferentes valores da razão de amortecimento ξ.

d) Caracterizar uma vibração com batimento. Indicar em que condições ocorre.

2) A resposta $\{x(t)\}$ de um sistema com 2 graus de liberdade a uma perturbação inicial $\{x(0)\}$ e $\{\dot{x}(0)\}$ é dada pela combinação linear das formas naturais de vibração $\{u\}_1$ e $\{u\}_2$ e pode escrever-se na forma:

$\{x(t)\}=\{u\}_1\eta_1(t)+\{u\}_2\eta_2(t)$

$=c_1\{u\}_1\cos(\omega_1 t-\phi_1)+c_2\{u\}_2\cos(\omega_2 t-\phi_2)$

onde $\eta_1(t)$ e $\eta_2(t)$ representam as coordenadas naturais.

Para um vector de deslocamentos iniciais $\{x(0)\}=\alpha\{u\}_2$ e um vector de velocidades $\{\dot{x}(0)\}=\{0\}$, demonstrar que a resposta do sistema é uma oscilação harmónica de frequência ω_2 e de configuração espacial $\{u\}_2$.

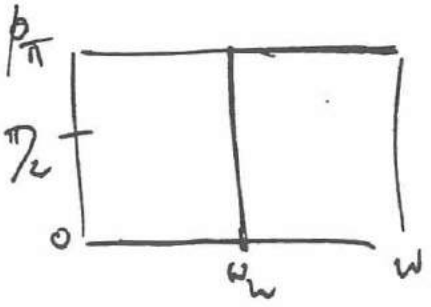
3) Para um sistema linear discreto com n graus de liberdade:

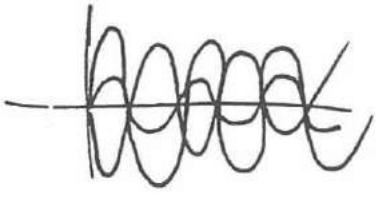
a) Definir modo natural e forma natural de vibração.

b) Indicar vantagens e/ou inconvenientes da técnica designada por "análise modal" ou "sobreposição modal" na resolução do regime forçado. Justificar a designação "sobreposição modal".

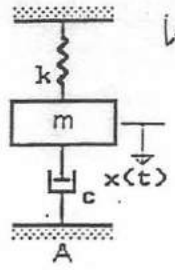
c) Em que condições os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para calcular o regime forçado de um sistema não conservativo?

4) Escrever a equação diferencial para as vibrações longitudinais de uma barra de secção recta constante. Mostrar que existem soluções de variáveis separáveis da forma $u(x,t)=U(x)g(t)$.





C11



1) O oscilador elementar representado na figura é constituído por uma massa, por um amortecedor viscoso e por uma mola de rigidez k=128 N/m.

Por acção de um deslocamento inicial, o sistema começa a vibrar em torno da sua posição de equilíbrio estático medindo-se os seguintes parâmetros:

- período de oscilação: 1.6769 s
- razão entre as amplitudes de duas oscilações consecutivas: 10.4604.

Determinar:

a) a razão de amortecimento ξ;

b) a frequência natural de vibração não amortecida ω_n;

c) a massa m, a constante de amortecimento c e escrever a equação de movimento;

d) a resposta x(t) permanente do sistema para uma solicitação do tipo F(t)=1.2697 cos(3.2726 t) N;

e) o esforço transmitido ao apoio A para a solicitação da alínea anterior.

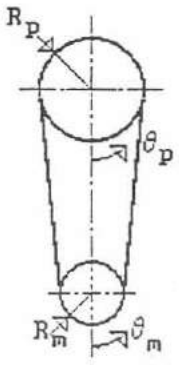
2) O sistema de transmissão representado na figura a) é constituído por:
- um motor cujo veio está acoplado de forma rígida a uma polia motora, sendo o momento de inércia do conjunto relativamente ao eixo aa' igual a J_m;
- uma correia dentada de massa desprezável e de rigidez k_c que transmite o movimento da polia motora de raio R_m à polia movida de raio R_p e momento de inércia J_p relativamente ao eixo bb';
- um veio de momento polar de inércia I_p e de material com massa específica ρ e módulo de elasticidade transversal G.

As oscilações do sistema podem ser descritas pelo ângulo $\theta_m(t)$ de rotação da polia motora e pelo ângulo $\theta_p(t)$ de rotação da polia movida medidos a partir da posição de equilíbrio estático.

a) Estabelecer as equações de movimento do sistema.
(Sugestão: utilizar o formalismo de Lagrange)
b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração.
c) Normalizar as formas naturais de modo a transformar a matriz de massa modal numa matriz identidade.
d) Exprimir as equações de movimento do sistema na base modal.
e) Calcular, para a solicitação representada na figura b) e actuante sobre a polia motora, a contribuição do primeiro modo natural de vibração na resposta do sistema.

Aplicação numérica:

R_m=0.05 m R_p=0.075 m L_1=0.9 m L_2=0.1 m
$J_m=2.0*10^{-3}$ kgm^2 $J_p=1.45*10^{-2}$ kgm^2
$k_c=1*10^6$ N/m $G=8.1*10^{10}$ Pa
$I_p=1.146*10^{-7}$ m^4 ρ=7850 kg/m^3



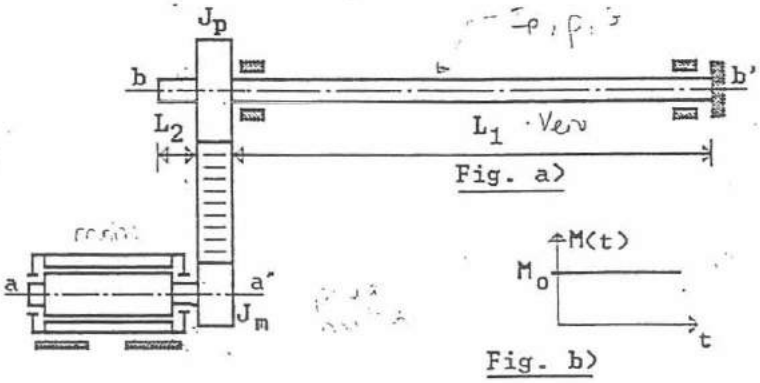
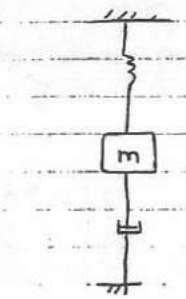


Fig. a)

Fig. b)

Exame 18.02.93

1.



a)

Decremento logaritmico: $\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln 10,4604 = 2,348$

Razão de amortecimento: $\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{2,348}{\sqrt{4\pi^2 + 2,348^2}} = 0,35$

b)

$w_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,6769} = 3,747 \text{ rad/s} \Rightarrow w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{3,747}{\sqrt{1-0,35^2}} = 4 \text{ rad/s}$

c)

$m = \frac{K}{w_n^2} = \frac{128}{16} = 8 \text{ Kg}$

$c = \xi \cdot c_c = \xi \sqrt{2 km} = 0,35 \cdot \sqrt{2 \cdot 128 \cdot 8} = 15,84 \text{ N/m}$

Eq. do movimento: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

d)

$x(t) = X(w) \cdot \cos(wt - \phi)$

$X(w) = \frac{F}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$ $\qquad \beta = \frac{w}{w_n} = \frac{3,2726}{4} = 0,81815$

$X(w) = \frac{1,26097}{128} \cdot 1,51219 = 0,015$

$\phi = tg^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} = tg^{-1} \frac{2 \cdot 0,35 \cdot 0,81815}{1 - 0,81815^2} = 1,047 \text{ rad} = 60°$ ⇑ $\frac{\pi}{3}$ rad

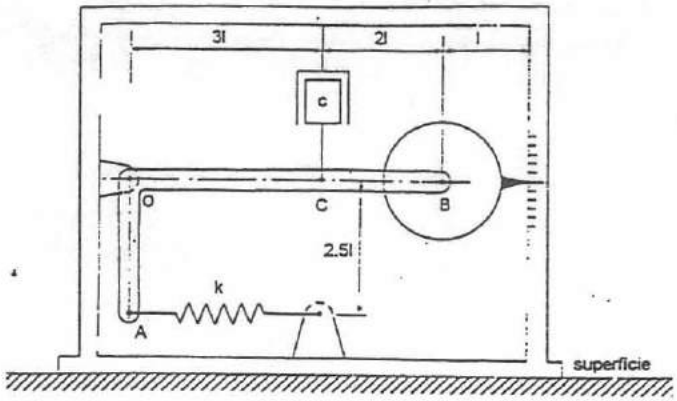
$x(t) = 0,015 \cos\left(3,2726t - \frac{\pi}{3}\right)$

e)

$f_c(t) = c\dot{x}(t) = -15,84 \cdot 0,015 \cdot 3,2726 \cdot \operatorname{sen}\left(3,2726t - \frac{\pi}{3}\right) = -0,778 \operatorname{sen}\left(3,2726t - \frac{\pi}{3}\right)$

$f_{T_A} = -f_c(t) = 0,778 \operatorname{sen}\left(3,2726t - \frac{\pi}{3}\right)$

10



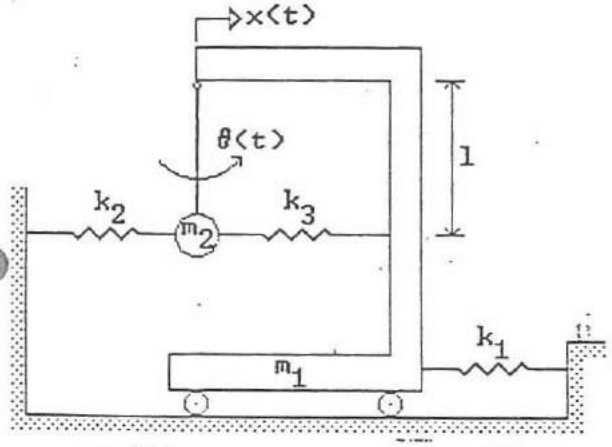
1) A figura representa um instrumento de medição das pequenas amplitudes do deslocamento de vibração de uma superfície. O transdutor é constituído por:

- um braço de ligação AOB, em forma de "L" e de massa desprezável, que roda em torno do ponto O;
- uma massa de 0.5 Kg ligada ao braço no ponto B;
- um dissipador de constante de amortecimento c, ligada ao braço no ponto C;
- uma mola de constante de rigidez k, ligada ao braço no ponto A;
- um ponteiro, que se move sobre uma escala não calibrada, marcada na caixa de suporte.

O instrumento ainda não está calibrado de modo a medir-se directamente a amplitude do deslocamento da sua base.

A frequência natural não amortecida do aparelho é de 2.5 Hz e a razão entre duas amplitudes consecutivas em regime livre é de 111. Determinar:

a) a equação de movimento da massa concentrada em B;
b) a constante de rigidez da mola;
c) a razão de amortecimento;
d) a frequência angular natural amortecida;
e) a constante de amortecimento;
f) a amplitude do deslocamento de vibração da superfície, quando a sua frequência de vibração é de 2 Hz, sabendo que o ponteiro indica um deslocamento de 0.5 mm.
g) o erro cometido se se tomasse o valor lido como o verdadeiro deslocamento da superfície (Nota: o instrumento ainda não está calibrado).



2) O sistema representado na figura é constituído por:
-um carro de massa m_1 ligado a uma mola de rigidez k_1;
-uma haste rígida articulada ao carro, na extremidade da qual está fixa uma massa m_2 ligada a duas molas de rigidez k_2 e k_3 respectivamente.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas x(t) e θ(t).

a) Estabeler, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.(Admitir o ângulo θ(t) como sendo pequeno)

Aplicação numérica:

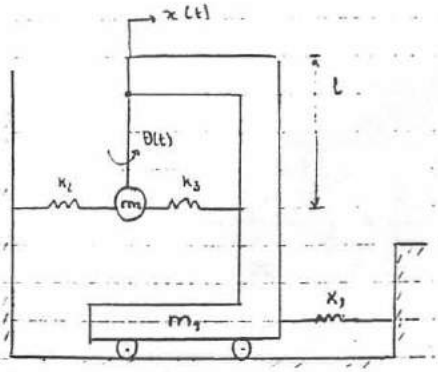
m_1=25 kg m_2=5 kg l=1 m

$k_1=4.5*10^4$ N/m $k_2=5.0*10^3$ N/m $k_3=2.5*10^3$N/m

b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração.
c) Normalizar os vectores modais de modo que as massas modais sejam unitárias.
d) Esboçar e comentar as formas naturais de vibração.
e) Determinar a resposta do sistema às condições iniciais:

$x(t=0)=50$ mm, $\dot{x}(t=0)=0$ mm/s, $\theta(t=0)=0$ rad, $\dot{\theta}(t=0)=0$ rad/s

2.



$m_1 = 25\ kg$
$m_2 = 5.1\ kg$
$l = 1\ m$
$k_1 = 4{,}5 \times 10^4\ N/m$
$k_2 = 5 \times 10^3\ N/m$
$k_3 = 2{,}5 \times 10^3\ N/m$

a)

Equações de movimento do sistema:

Energia cinética:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 \qquad \text{com } J_2 = m_2 l^2$$

Energia potencial:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 (x + \theta l)^2 + \frac{1}{2} k_3 (x - \theta l)^2$$

[x] $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k_1 x + k_2 x + k_2 \theta l + k_3 x - k_3 \theta l = (k_1 + k_2 + k_3)x + (k_2 - k_3) l \theta$$

[θ] $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_2 l^2 \ddot{\theta}$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = k_2 l x + k_2 l^2 \theta - k_3 l x + k_3 l^2 \theta = (k_2 + k_3) l^2 \theta + (k_2 - k_3) l x$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + (k_1 + k_2 + k_3)x + (k_2 - k_3) l \theta = 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\theta} + (k_2 - k_3) l x + (k_2 + k_3) l^2 \theta = 0 \end{cases}$$

Matriz de massa: $\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

" de rigidez: $\begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & (k_2 - k_3) l \\ (k_2 - k_3) l & (k_2 + k_3) l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}25 \times 10^4 & 2500 \\ 2500 & 7500 \end{bmatrix}$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 52500 & 2500 \\ 2500 & 7500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e) Resposta do sistema às condições iniciais: $x(t=0) = 50\ mm$

$\dot{x}(t=0) = 0\ mm/s$

$\theta(t=0) = 0\ rad$

$\dot{\theta}(t=0) = 0\ rad/s$

Resposta do sistema:

$$\{x(t)\} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \end{Bmatrix}$$

$\det[u] = 1{,}38 + 4{,}38 = 5{,}76$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5{,}76}} \cdot \sqrt{(1{,}38 \cdot 0{,}05)^2} = 0{,}02875$$

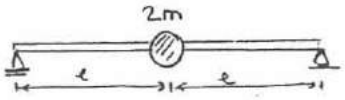
$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{5{,}76}} \cdot (4{,}38 \cdot 0{,}05) = 0{,}9125$$

$\phi_1 = tg^{-1}\, 0 = 0$

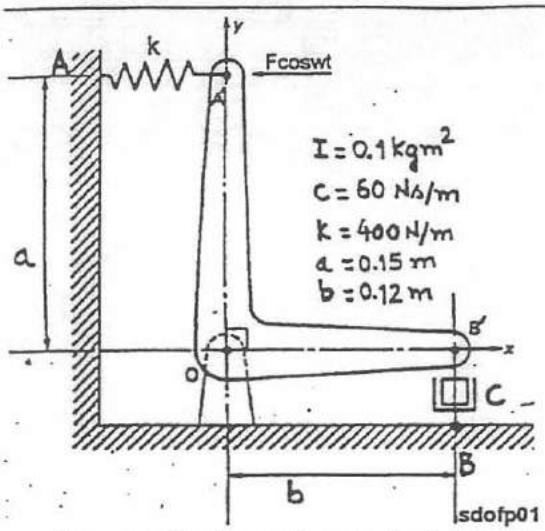
$\phi_2 = tg^{-1}\, 0 = 0$

$$\Rightarrow \{x(t)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4{,}38 & 1{,}38 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0{,}02875 \cos(\omega_1 t) \\ 0{,}9125 \cos(\omega_2 t) \end{Bmatrix}$$

3.



a) Esboçar as 4 primeiras formas naturais de vibração:



1) Um componente mecânico em forma de L, conforme representado na figura, oscila em torno do ponto O e possui um momento de inércia I em relação a um eixo perpendicular ao plano da figura e que passa por O. O componente está ligado ao exterior através de uma mola de rigidez k, no ponto A', e de um amortecedor de coeficiente de amortecimento c, no ponto B'.

No ponto A' e na direcção horizontal está aplicada uma solicitação harmónica F(t).

Considerando que na posição de equilíbrio estático a direcção OA' coincide com a vertical, determinar:

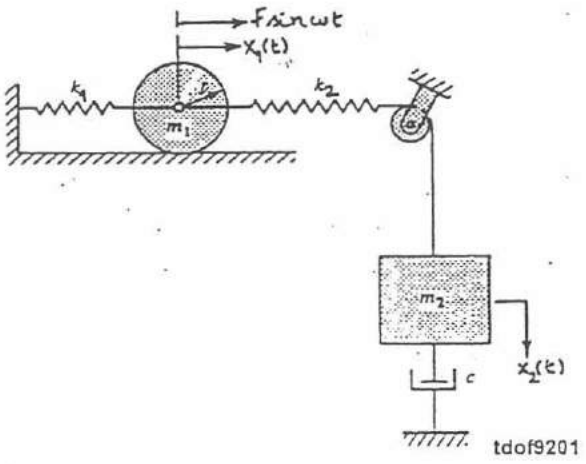
a) a equação de movimento do sistema;

b) a razão de amortecimento ξ;

c) a frequência natural angular amortecida ω_c e o respectivo período T_c;

d) a resposta do sistema pará uma solicitação harmónica de amplitude igual a 50 N e frequência igual a 3 Hz;

e) as forças transmitidas aos apoios A e B para a solicitação da alínea anterior.



2) O sistema representado na figura é constituído por um cilindro de massa m, que rola sem escorregar sobre uma superfície plana e que está ligado ao exterior uma mola de rigidez k_1 e a uma massa m_2 por um cabo de rigidez k_2. A massa m_2 translada verticalmente e está ligada ao exterior por um amortecedor de tipo viscoso e de constante c.

No eixo do cilindro está aplicada uma solicitação harmónica f(t)= Fsinωt.

O movimento do sistema a partir da posição de equilíbrio estático é descrito pelas coordenadas absolutas $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

a) Escrever literalmente as equações do movimento utilizando o formalismo de Lagrange.

Para o sistema não amortecido e para os valores seguintes:

$m_1=\frac{2}{3}m$ $m_2=3m$ $k_2=160$ N/m $k_1=80$ N/m

b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração;

c) Representar graficamente as formas naturais de vibração;

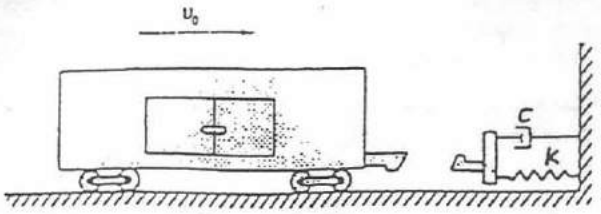
d) Normalizar os vectores modais para massas modais unitárias;

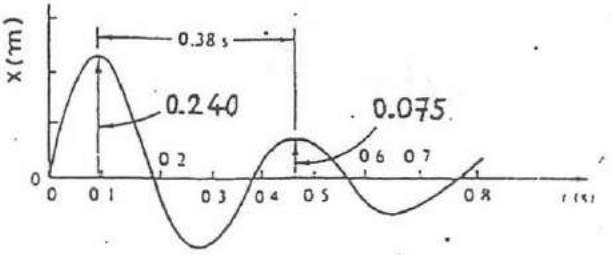
e) Escrever as equações do movimento na base modal;

f) Determinar a amplitude da resposta $x_2(t)$ para m=2 kg e ω=8 rad/s e comentar o resultado.

g) Redimensionar a constante de rigidez k_2 da mola de modo que a frequência fundamental do sistema seja inferior a 2 rad/s.

Teste de 93-02-03
Parte prática (12 valores)





1) Uma carruagem de comboio carregada e com o peso de 160000 N rola com uma velocidade v_0 quando choca e engata num sistema mola-amortecedor. Na figura representa-se o registo da resposta x(t) do sistema após se ter dado o acoplamento entre a carruagem e o sistema mola-amortecedor. Determinar:

a) o decremento logarítmico δ;

b) a razão de amortecimento ξ;

c) a frequência natural angular amortecida ω_d;

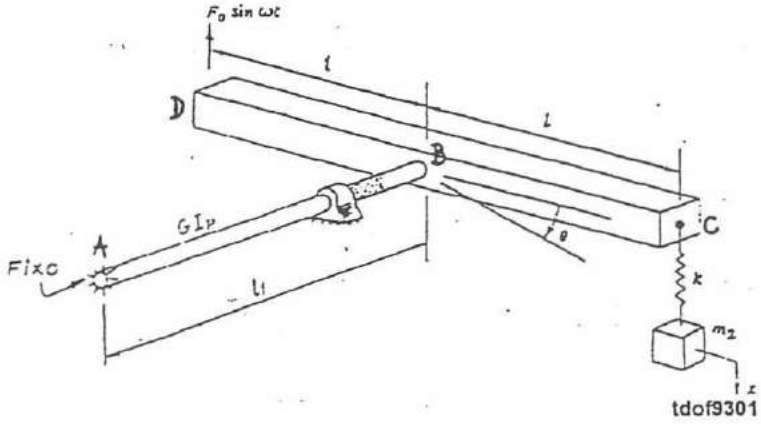
d) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

e) a rigidez da mola k;

f) a constante de amortecimento c;

g) a velocidade inicial v_0;

h) a razão de amortecimento ξ se a carruagem estiver vazia e cujo peso é igual a 36000 N;



2) O sistema representado na figura é constituído por um veio fixo em A e ligado em B a uma barra rígida de massa m_1. Na extremidade C da barra está ligada uma mola de rigidez k a qual se encontra ligada a uma massa concentrada m_2. Na extremidade D da barra está aplicada uma solicitação harmónica f(t)= Fsinωt.

O movimento do sistema a partir da posição de equilíbrio estático é descrito pelas coordenadas θ(t) e x(t) e a massa do veio é desprezável face à massa da barra.

a) Escrever literalmente as equações do movimento utilizando o formalismo de Lagrange.

Para os valores numéricos seguintes:

$m_1=m_2=3m$ $l_1=l=1$ m $k=160$ N/m $GI_p=80$ Nm²

b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração;

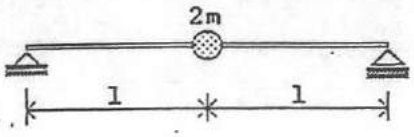
c) Representar graficamente as formas naturais de vibração;

d) Normalizar os vectores modais para massas modais unitárias;

e) Escrever as equações do movimento na base modal;

f) Determinar a amplitude da resposta x(t) para m=2 kg e ω=8 rad/s e comentar o resultado.

g) Redimensionar a constante de rigidez k da mola de modo que a frequência fundamental do sistema seja inferior a 2 rad/s.



3) Uma viga de comprimento 2l, de secção recta de área A e momento de inércia I, e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, está simplesmente apoiada, conforme se representa na figura, e suporta a meio vão um disco de massa 2m.

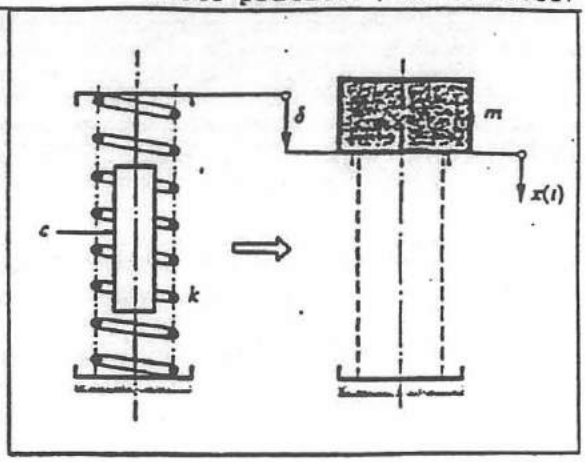
a) Esboçar as quatro primeiras formas naturais de vibração.

b) Pelo método da energia de Rayleigh, determinar a estimativa da frequência fundamental de vibração, utilizando como aproximação da deformada a forma fundamental exacta de uma viga simplesmente apoiada.

c) Determinar as frequências naturais ω_2 e ω_4 de forma exacta.

1) Um elemento de suspensão, destinado a um veículo de estrada, é submetido a ensaios em laboratório que fornecem os seguintes resultados:

- o peso de uma massa de 350 kg, aproximadamente igual a um quarto da do veículo, provoca um deslocamento estático δ=0.28 m;
- as oscilações em torno da posição de equilíbrio têm uma frequência f=0.835 Hz.



A partir destes resultados, determinar:

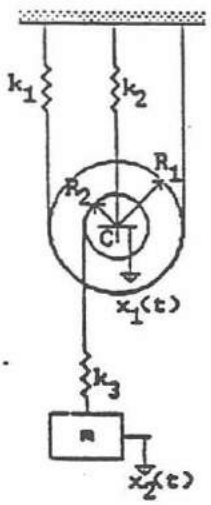
a) o valor da constante de rigidez k da mola;

b) a frequência natural não amortecida ω_n;

c) a razão de amortecimento ξ;

d) o valor da constante de amortecimento c.

e) Escrever a expressão da velocidade $\dot{x}(t)$ da massa m, quando a esta são aplicadas as condições iniciais: $x(t=0)=0$, $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$ m/s. Esboçar os gráficos de $x(t)$ e $\dot{x}(t)$.



2) O sistema representado na figura é constituído por duas polias concêntricas, de raios R_1 e R_2 e massas m_1 e m_2, suspensas por dois cabos inextensíveis ligados a molas de rigidez k_1 e k_2 respectivamente. Uma massa m está suspensa da polia de menor raio por uma mola de rigidez k_3. As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas lineares $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

a) Estabeler, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Aplicação numérica:

m_1=8 kg $\quad$ m_2=2kg $\quad$ m=10kg

R_1=150 mm $\quad$ R_2=75 mm

$k_1=8.75*10^2$ N/m $\quad$ $k_2=6.5*10^3$ N/m $\quad$ $k_3=1.0*10^5$N/m

b) Determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

c) Determinar as frequências e formas naturais de vibração.

d) Esboçar e comentar as formas naturais de vibração.

e) Utilizando a análise modal, determinar a resposta do sistema às condições iniciais: $x_1(t=0)=-15$ mm, $\dot{x}_1(t=0)=0$, $x_2(t=0)=13.870$ mm, $\dot{x}_2(t=0)=0$.

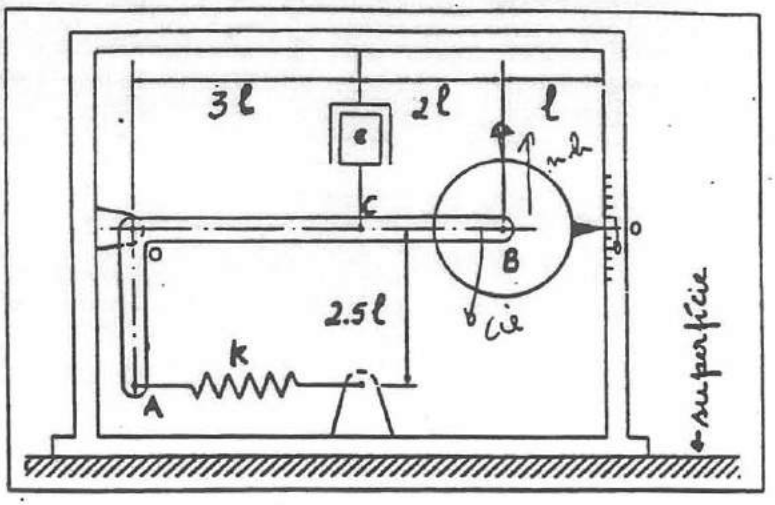
C3

FEUP - Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

VIBRAÇÕES

Teste de 04.02.92
Parte prática (12 valores)

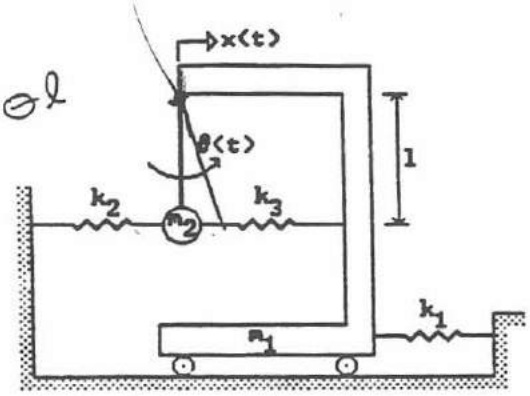
1) A figura representa um instrumento de medição das pequenas amplitudes do deslocamento de vibração de uma superfície. O transdutor é constituído por:



- um braço de ligação AOB, em forma de "L" e de massa desprezável, que roda em torno do ponto O;
- uma massa de 0.5 Kg ligada ao braço no ponto B;
- um dissipador de constante de amortecimento c, ligada ao braço no ponto C;
- uma mola de constante de rigidez k, ligada ao braço no ponto A;
- um ponteiro, que se move sobre uma escala não calibrada, marcada na caixa de suporte.

O instrumento ainda não está calibrado de modo a medir-se directamente a amplitude do deslocamento da sua base.
A frequência natural não amortecida do aparelho é de 2.5 Hz e a razão entre duas amplitudes consecutivas em regime livre é de 111. Determinar:

a) a equação de movimento da massa concentrada em B;
b) a constante de rigidez da mola;
c) a razão de amortecimento;
d) a frequência angular natural amortecida;
e) a constante de amortecimento;
f) a amplitude do deslocamento de vibração da superfície, quando a sua frequência de vibração é de 2 Hz, sabendo que o ponteiro indica um deslocamento de 0.5 mm.
g) o erro cometido se se tomasse o valor lido como o verdadeiro deslocamento da superfície (Nota: o instrumento ainda não está calibrado).



2) O sistema representado na figura é constituído por:
-um carro de massa m_1 ligado a uma mola de rigidez k_1;
-uma haste rígida articulada ao carro, na extremidade da qual está fixa uma massa m_2 ligada a duas molas de rigidez k_2 e k_3 respectivamente.
As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas $x(t)$ e $\theta(t)$.

a) Estabeler, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange. (Admitir o ângulo $\theta(t)$ como sendo pequeno)
Aplicação numérica:

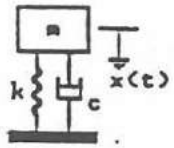
m_1=25 kg m_2=5 kg l=1 m

$k_1=4.5*10^4$ N/m $k_2=5.0*10^3$ N/m $k_3=2.5*10^3$N/m

b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração.
c) Normalizar os vectores modais de modo que as massas modais sejam unitárias.
d) Esboçar e comentar as formas naturais de vibração.
e) Determinar a resposta do sistema às condições iniciais:

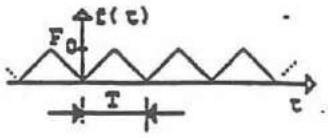
$x(t=0)=50$ mm, $\dot{x}(t=0)=0$ mm/s, $\theta(t=0)=0$ rad, $\dot{\theta}(t=0)=0$ rad/s

Parte Prática (14 valores)



1/ O oscilador elementar representado na figura é constituído por uma massa m=5 kg. por uma mola de rigidez k=3500 N/m e por um amortecedor viscoso de constante c.
Num ensaio em regime livre, verificou-se que a amplitude da 5ª oscilação é igual a 25% da amplitude da 1ª oscilação.
Determinar:

a/ a razão de amortecimento ξ;
b/ a constante de amortecimento c;
c/ a frequência de ressonância de fase;
d/ a frequência de ressonância de amplitude:
e/ o factor máximo de amplificação dinâmica ;
f/ a resposta permanente do sistema para os três primeiros harmónicos da solicitação periódica representada na figura.



2/ O sistema mecânico representado na figura é constituído por:
- uma mesa de massa m com movimento de translação horizontal e sem atrito sobre um plano fixo;
- um cilindro de massa M e raio r que rola sem escorregar sobre a mesa.

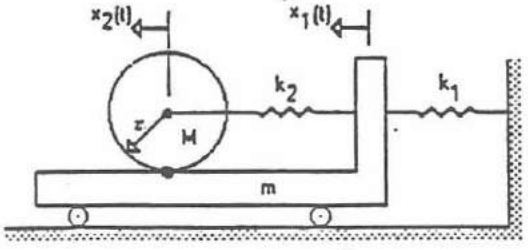
As oscilações do sistema podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, medidas a partir da posição de equilíbrio estático, que referenciam respectivamente a posição da mesa e do eixo do cilindro.

a/ Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.
b/ Determinar as frequências e formas naturais de vibração.
c/ Normalizar as formas naturais de modo a transformar a matriz de massa modal numa matriz identidade.
d/ Exprimir as equações de movimento do sistema na base modal.
e/ Representar a configuração do sistema nas suas formas naturais de vibração.
f/ Determinar a resposta do sistema para as seguintes condições iniciais:

$$x_1(t=0)=x_2(t=0)=0.02 \text{ m} \qquad \dot{x}_1(t=0)=\dot{x}_2(t=0)=0.0 \text{ m/s}$$

Aplicação numérica:

m=5 kg
M=20 kg
r=50 mm
$k_1=9*10^3$ N/m
$k_2=3*10^4$ N/m



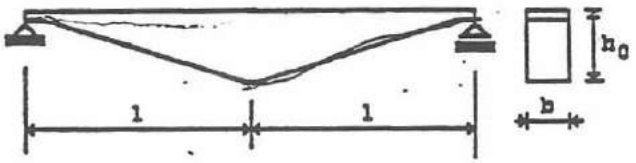
C6

3/ A figura representa uma viga simplesmente apoiada, de comprimento 2l e de secção recta rectangular com altura variável. O material possui módulo de elasticidade E e massa específica ρ.

Pelo método da energia de Rayleigh, e utilizando como aproximação da forma fundamental a forma exacta de uma viga simplesmente apoiada de secção constante,

a/ determinar a estimativa da frequência fundamental de vibração da viga.

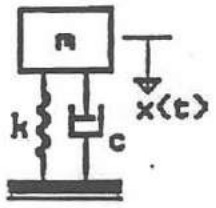
b/ Determinar a frequência fundamental exacta supondo a altura da seção recta constante e igual a $\frac{h_0}{2}$. Comparar com o resultado obtido na alínea a/.



Nota: $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$.

- C7

Parte Prática (14 valores)



1/ O oscilador elementar representado na figura é constituído por uma massa m, por um amortecedor viscoso de constante c e por uma mola de rigidez k. A equação de movimento em regime livre é da forma $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$ e após divisão pela massa m escreve-se : $\ddot{x}(t)+8\dot{x}(t)+64x(t)=0$. Se o valor da massa m for alterado para m', a razão entre a nova frequência amortecida e a nova frequência natural ω'_d/ω'_n é igual a $\sqrt{0.96}$.

Determinar:

a/ a frequência natural de vibração não amortecida ω_n;

b/ a razão de amortecimento ξ;

c/ a nova razão de amortecimento ξ';

c/ a massa m, a constante de amortecimento c e a constante de rigidez k;

d/ a resposta do oscilador em termos da velocidade $\dot{x}(t)$ para as condições iniciais $x_0=0.040$ m e $v_0=0.117$ m/s.

C8

2/ O sistema de transmissão representado na figura a) é constituido por:

- um motor cujo veio está acoplado de forma rigida a uma polia motora, sendo o momento de inércia do conjunto relativamente ao eixo aa'igual a J_m;
- uma correia dentada de massa desprezável e de rigidez k_c que transmite o movimento da polia motora de raio R_m à polia movida de raio R_p;
- um veio de rigidez à torção k_v, de momento polar de inércia I_p e de material com massa especifica ρ.

As oscilações do sistema podem ser descritas pelo ângulo $\theta_m(t)$ de rotação da polia motora e pelo ângulo $\theta_p(t)$ de rotação da polia movida medidos a partir da posição de equilíbrio estático.

a/ Estabelecer as equações de movimento do sistema.
(<u>Sugestão:</u> utilizar o formalismo de Lagrange)

b/ Determinar as frequências e formas naturais de vibração.

c/ Normalizar as formas naturais de modo a transformar a matriz de massa modal numa matriz identidade.

d/ Exprimir as equações de movimento do sistema na base modal.

e/ Calcular a resposta do sistema para $t>t_2$ à solicitação impulsiva representada na figura b) e actuante sobre a polia movida.

<u>Aplicação numérica:</u>

R_m=0.075 m R_p=0.05 m L_1=0.75 m L_2=0.05 m

$J_m=1.5\cdot10^{-2}$ kgm^2 $J_p=1.45\cdot10^{-2}$ kgm^2

$k_c=5\cdot10^5$ N/m k_v=12500 Nm/rad

$I_p=1.146\cdot10^{-7}$ m^4 ρ=7850 kg/m^3

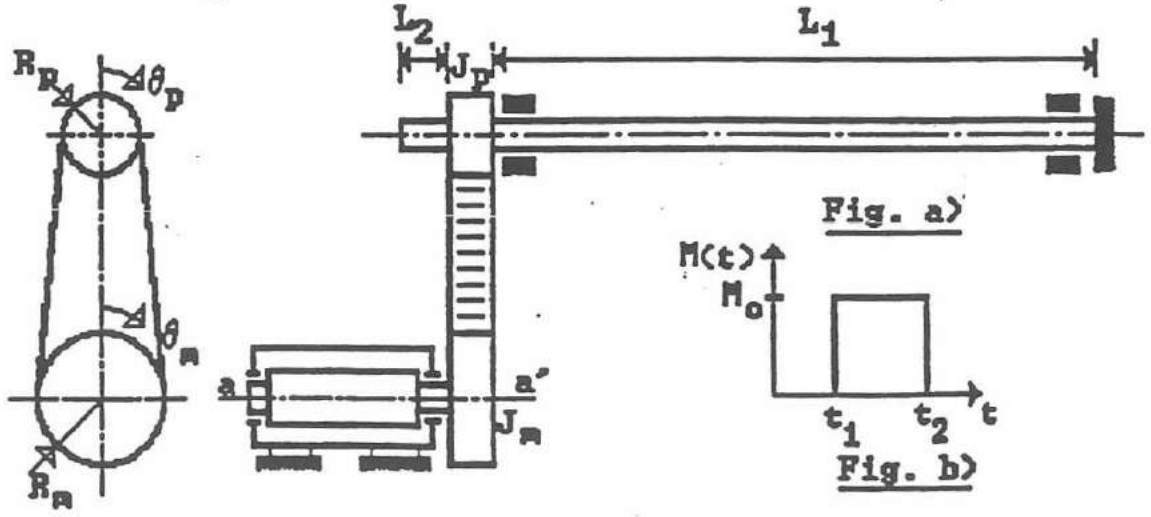
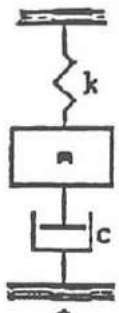


Fig. a)

Fig. b)

C9

Parte Prática (14 valores)



1/ O oscilador elementar representado na figura é constituido por uma massa, por um amortecedor viscoso e por uma mola de rigidez k=90 N/m.
Por acção de um deslocamento inicial, o sistema começa a vibrar em torno da sua posição de equilíbrio estático medindo-se os seguintes parâmetros:
- período de oscilação: 2.1376 s
- razão entre as amplitudes de duas oscilações consecutivas: 3.6058

Determinar:
a/ a razão de amortecimento ξ;
b/ a frequência natural de vibração não amortecida ω_n;
c/ a massa m, a constante de amortecimento c e escrever a equação de movimento;
d/ a resposta x(t) permanente do sistema para uma solicitação do tipo F(t)=0.4174 cos(2.4594 t) N;
e/ o esforço transmitido ao apoio A para a solicitação da alínea anterior.

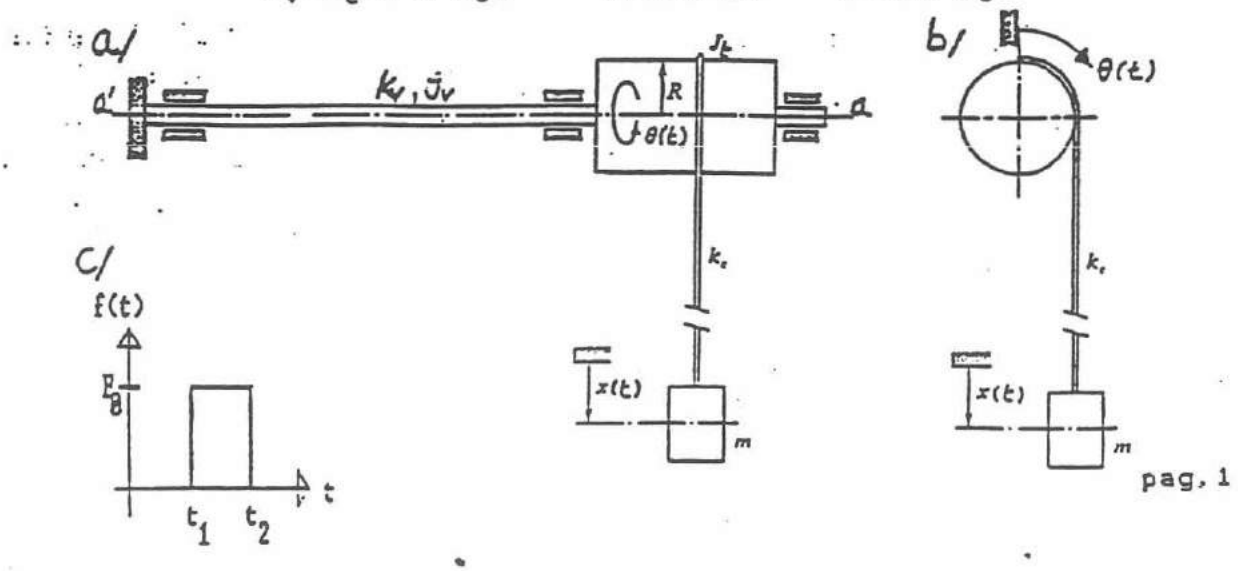
2/ O sistema de elevação representado nas figuras a) e b) é constituido por:
- um veio de rigidez à torção k_v e de momento de inércia J_v relativamente ao eixo a'a;
- um tambor rígido de momento de inércia J_t em relação ao eixo a'a;
- um cabo extensível de rigidez k_c ao qual está ligado um corpo de massa m.

a/ Estabelecer as equações de movimento do sistema.
(Sugestão: utilizar o formalismo de Lagrange)
b/ Determinar as frequências e formas naturais de vibração.
c/ Normalizar as formas naturais de modo que as massas modais sejam unitárias.
d/ Exprimir as equações de movimento do sistema na base modal.
e/ Para a solicitação impulsiva representada na figura c) e actuante sobre a massa m, calcular a resposta do sistema para t pertencente ao intervalo $[t_1 ; t_2]$.

Aplicação numérica:

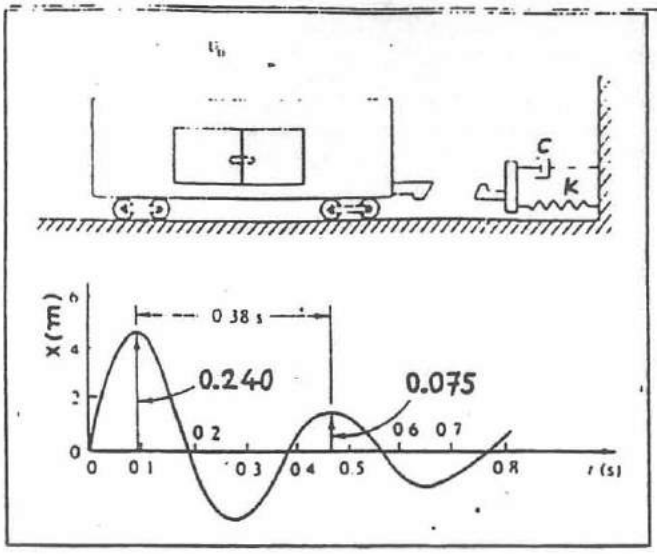
k_v=16400 Nm/rad $k_c=1.33\cdot10^6$ N/m

$J_v+J_t=J=5$ kgm^2 R=200 mm m=300 kg



FEUP-Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
VIBRAÇÕES

Teste de 93-02-03
Parte prática (12 valores)



1) Uma carruagem de comboio carregada e com o peso de 160000 N rola com uma velocidade v_0 quando choca e engata num sistema mola-amortecedor. Na figura representa-se o registo da resposta x(t) do sistema após se ter dado o acoplamento entre a carruagem e o sistema mola-amortecedor. Determinar:

a) o decremento logarítmico δ;

b) a razão de amortecimento ξ;

c) a frequência natural angular amortecida ω_c;

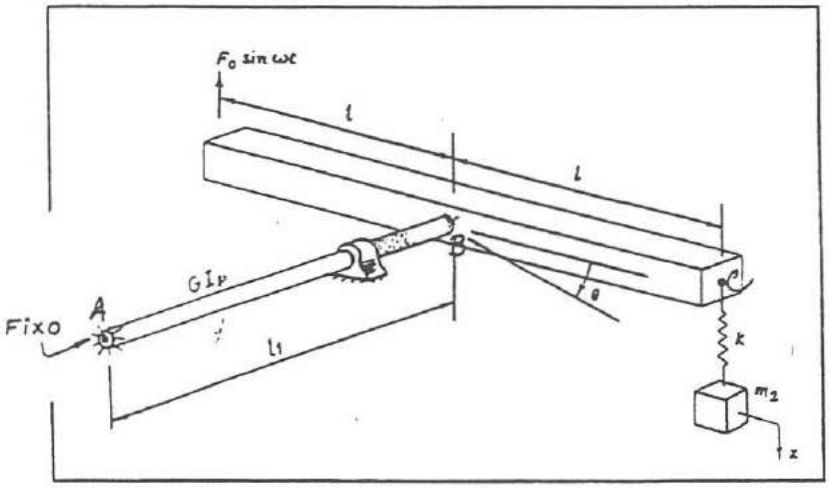
d) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

e) a rigidez da mola k;

f) a constante de amortecimento c;

g) a velocidade inicial v_0;

h) a razão de amortecimento ξ se a carruagem estiver vazia e cujo peso é igual a 36000 N.



2) O sistema representado na figura é constituído por um veio fixo em A e ligado em B a uma barra rígida de massa m_1. Na extremidade C da barra está ligada uma mola de rigidez k a qual se encontra ligada a uma massa concentrada m_2. Na extremidade D da barra está aplicada uma solicitação harmónica f(t)= Fsinωt. O movimento do sistema a partir da posição de equilíbrio estático é descrito pelas coordenadas θ(t) e x(t) e a massa do veio é desprezável face à massa da barra.

a) Escrever literalmente as equações do movimento utilizando o formalismo de Lagrange.

Para os valores numéricos seguintes:

$m_1=m_2=3m$ $l_1=l=1$ m k=160 N/m $GI_p=80$ Nm^2

b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração;

c) Representar graficamente as formas naturais de vibração;

d) Normalizar os vectores modais para massas modais unitárias;

e) Escrever as equações do movimento na base modal;

f) Determinar a amplitude da resposta x(t) para m=2 kg e ω=8 rad/s e comentar o resultado.

g) Redimensionar a constante de rigidez k da mola de modo que a frequência fundamental do sistema seja inferior a 2 rad/s.

$$I = \frac{1}{12} m l^2$$

v.s.f.f

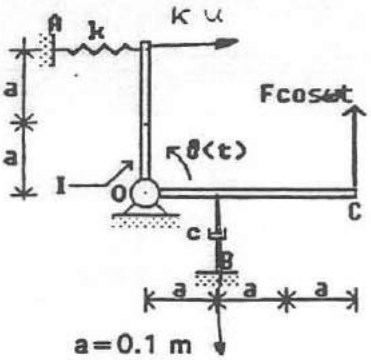
FEUP-Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

VIBRAÇÕES

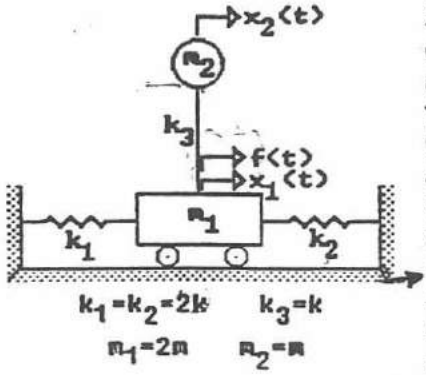
Exame de 92.09.04
Parte prática (12 valores)

1) A figura representa um sistema mecânico constituído por um braço em forma de "L" que oscila em torno do ponto O, em relação ao qual possui momento de inércia I, e que está ligado ao exterior por uma mola de rigidez K e por um amortecedor de tipo viscoso com constante c.
Num ensaio do mecanismo em regime livre, a amplitude da 4ª oscilação é igual a 30 % da amplitude da 1ª oscilação.
Determinar:

a) a equação de movimento do sistema;
b) a razão de amortecimento ξ;
c) a constante de amortecimento c;
d) a frequência de ressonância de amplitude;
e) o valor máximo do factor de amplificação dinâmica;
f) a força transmitida ao apoio A para uma solicitação harmónica $f(t)=F\cos\omega t$ aplicada em C com $F=500$ N e $\omega=5$ rad/s.

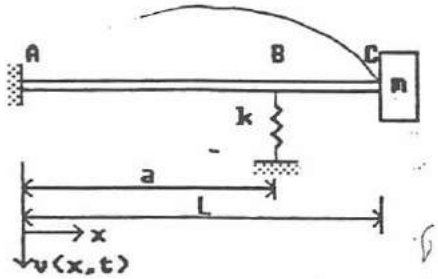


$a=0.1$ m
$k=156.25$ N/m
$\omega_n=25$ rad/s



2) O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.
As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera respectivamente.

a) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.
b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.
c) Esboçar e comentar as formas naturais de vibração.
d) Normalizar os vectores modais de modo que as massas modais sejam unitárias.
e) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.
f) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ da resposta da massa m_1 quando $f(t)=F\cos\omega t$ com $\omega=14.14$ rad/s , $k=200$ N/m e $m=2$ kg.
g) Redimensionar a rigidez k_3 da barra de modo que a amplitude $X_1(\omega)$ da massa m_1 seja nula.



3) A figura representa uma viga de comprimento L, encastrada na extremidade A, apoiada em B numa mola de rigidez k, e com uma massa m concentrada na extremidade C, sujeita a uma vibração lateral V(x,t). A secção recta da viga apresenta uma área A e momento de inércia I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa específica ρ.
Utilizando o método da energia de Rayleigh,

a) Escolher, justificando a opção, uma das duas deformadas seguintes para aproximação da forma fundamental de vibração:

i) $V(x)=\delta \sin\frac{\pi}{2L}x$;

ii) $V(x)=\delta\,(1-\cos\frac{\pi}{2L}x)$.

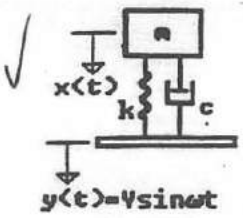
b) Determinar uma estimativa ω da frequência fundamental de vibração para $a=\frac{2}{3}L$.
c) Comentar o resultado.
d) Discutir a validade da solução obtida para valores limite da rigidez k da mola.

FEUP-Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

VIBRAÇÕES — **Exame de 92.09.04**

Parte teórica (8 valores)

Responder a 3 das questões: 1), 2), 3) e 4) e à questão 5)



1) O sistema representado na figura está sujeito a um movimento harmónico da base (transmissão passiva).

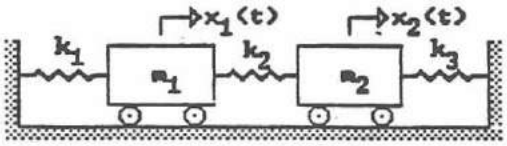
a) Estabelecer a equação diferencial do movimento absoluto x(t) da massa.

b) Definir e representar a transmissibilidade absoluta TR_a em função da frequência de excitação e para diferentes valores da razão de amortecimento.

c) Definir e representar a transmissibilidade relativa TR_r em função da frequência de excitação e para diferentes valores da razão de amortecimento.

d) O movimento harmónico da massa em relação à base é dado pela diferença entre os movimentos harmónicos x(t) e y(t), $z(t)=x(t)-y(t)$. As amplitudes de cada um destes movimentos verificam esta relação? Justificar.

2) Estabelecer, justificando o procedimento, a expressão do integral de Duhamel em termos da função de solicitação genérica f(t) e da função de resposta impulsiva h(t). Que princípio fundamental da mecânica está implícito nesta expressão?



3) O vector modal representativo da 2ª forma natural de vibração de um sistema linear discreto não amortecido e com dois graus de liberdade representado na figura é igual a: $\{u\}_2=\{1;-0.75\}^T$.

a) Representar a configuração espacial do sistema nesta forma natural de vibração.

b) Representar o movimento $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas massas do sistema para o segundo modo natural de vibração.

c) Indicar um conjunto de condições iniciais a aplicar ao sistema de modo que este responda com um movimento idêntico ao segundo modo natural de vibração.

4) Deduzir a equação diferencial para as vibrações longitudinais u(x,t) de uma barra de secção recta constante. Mostrar que existem soluções de variáveis separáveis da forma $u(x,t)=U(x)g(t)$.

---

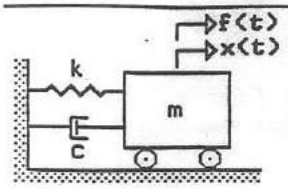
5) A solicitação actuante sobre um sistema vibratório é, normalmente, externa ao sistema e independente do movimento. No entanto, a força de excitação pode ser uma função do deslocamento, velocidade ou aceleração do sistema, como por exemplo, $f(t)=F_0\dot{x}(t)$. O comportamento vibratório de um tal sistema é descrito pela equação:

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F_0\dot{x}(t)$$

Admitindo uma solução da forma $x(t)=Ce^{st}$,

a) Estabelecer a equação característica ou de frequências.

b) Discutir a natureza das soluções da equação característica e o tipo de movimento do sistema.



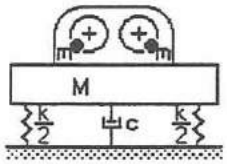
1) O comportamento vibratório do sistema com um grau de liberdade representado na figura é descrito pela equação: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)$.

a) Estabelecer a equação característica ou de frequência do sistema;

b) Discutir o tipo de raízes da equação característica em função do valor da razão de amortecimento ξ e caracterizar os respectivos tipos de movimento;

c) Representar, no plano complexo, o lugar geométrico das raízes da equação característica em função da razão de amortecimento ξ.

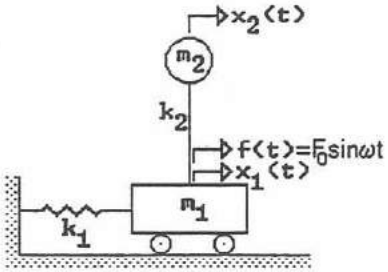
d) Indicar duas técnicas para calcular o regime forçado x(t) do sistema quando este é sujeito a uma excitação não-periódica f(t). Em que condições específicas se utiliza uma e outra?



2) O funcionamento do equipamento representado na figura é acompanhado de vibrações de grande amplitude. A análise do sistema mostra que a velocidade de funcionamento do sistema é bastante próxima da frequência de ressonância de amplitude.

a) Qual a alteração adequada para a rigidez da suspensão de modo a melhorar o comportamento do sistema ?

b) Discutir a eficiência do isolamento em função dos parâmetros M, k e c para uma determinada frequência de funcionamento. Acompanhar a discussão com gráficos ilustrativos.

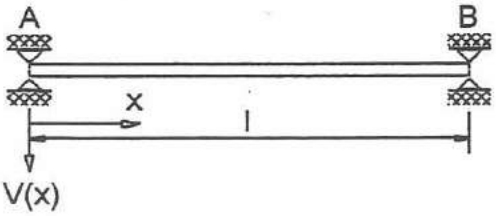


3) Ao sistema vibratório com 2 graus de liberdade representado na figura, é aplicada na massa m_1 uma solicitação harmónica $f(t)=F_0\sin\omega t$.

a) Caracterizar os movimentos de resposta $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de cada uma das massas m_1 e m_2 ;

b) Representar, graficamente, e comentar, a variação da amplitude da resposta de cada uma das massas em função da frequência de excitação ω. Indicar todos os pontos notáveis.

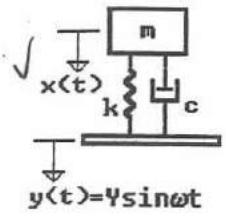
c) Representar, graficamente, a variação das frequências naturais do sistema em função da razão $\frac{m_2}{m_1}$.



4) A viga representada na figura, de comprimento l, é suportada por dois apoios duplos A e B que impedem o movimento transversal e o movimento longitudinal. A secção recta da viga apresenta área A e momento de inércia I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa específica ρ.

a) Escrever a equação da vibração de flexão da viga e respectivas condições de fronteira.

b) Assumindo uma deformada genérica V(x) para a forma fundamental da vibração lateral (de flexão) da viga, escrever a expressão da energia potencial elástica máxima.



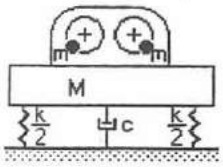
1) O sistema representado na figura está sujeito a um movimento harmónico da base (transmissão passiva).

a) Estabelecer a equação diferencial do movimento absoluto x(t) da massa.

b) Definir e representar graficamente a transmissibilidade absoluta TR_a em função da frequência de excitação e para diferentes valores da razão de amortecimento.

c) Definir e representar graficamente a transmissibilidade relativa TR_r em função da frequência de excitação e para diferentes valores da razão de amortecimento.

d) O movimento harmónico da massa relativamente à base, z(t), é dado pela relação, z(t)=x(t)-y(t). As amplitudes Z(ω), X(ω), Y(ω), de cada um destes movimentos verificam esta relação? Justificar.



2) O funcionamento do equipamento representado na figura é acompanhado de vibrações de grande amplitude. A análise do sistema mostra que a velocidade de funcionamento do sistema é bastante próxima da frequência de ressonância de amplitude.

a) Qual a alteração adequada para a rigidez da suspensão de modo a melhorar o comportamento do sistema ?

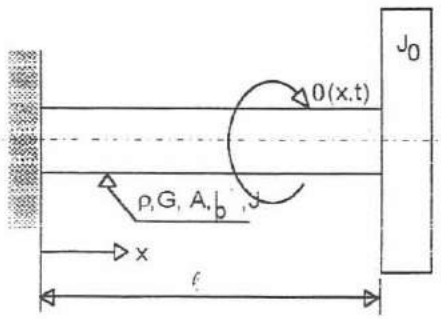
b) Discutir a eficiência do isolamento em função dos parâmetros M, k e c para uma determinada frequência de funcionamento. Acompanhar a discussão com gráficos ilustrativos.

3) Para estimar a frequência fundamental de vibração de um sistema, o quociente de Rayleigh constitui uma técnica bastante prática.

a) Indicar a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh.

b) Estabelecer um "paralelo" entre as aproximações utilizadas no quociente de Rayleigh para sistemas lineares discretos e sistemas contínuos.

c) Escrever as expressões genéricas do quociente de Rayleigh para sistemas lineares discretos e sistemas contínuos.



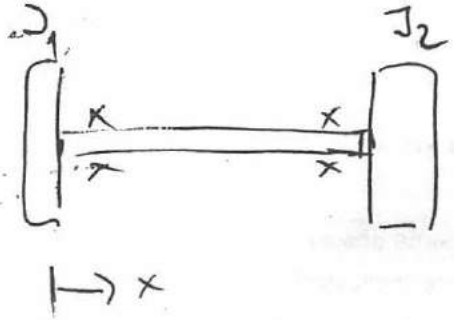
4) A figura representa um veio de secção constante em torção, apresentando uma das extremidades fixa e na outra um volante indeformável de momento de inércia J_0. O problema característico é definido pela equação diferencial

$$-\frac{d}{dx}\left(GI_p(x)\frac{d\theta(x)}{dx}\right) = \omega^2 J(x)\theta(x)$$

e respectivas condições de fronteira, e possui soluções $(\omega_r;\theta_r(x))\ r = 1.2.....\infty$.

a) Escrever as condições de fronteira que devem ser verificads pelas soluções $(\omega_r;\theta_r(x))\ r = 1.2.....\infty$.

b) A partir da equação característica e das condições de fronteira, estabelecer as propriedades de ortogonalidade das formas naturais de vibração $\theta_r(x)\ r = 1.2.....\infty$ em relação à inércia e à rigidez.



$\vartheta(x) = \beta\left(\frac{x}{l} + \alpha\right)$

$\frac{d\vartheta(x)}{dx} = \beta \frac{1}{l} = \frac{\beta}{l}$

Metoda energetska Rayleigh

$$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \left|\frac{d\vartheta(x)}{dx}\right|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \frac{\beta^2}{l^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} G I_p \frac{\beta^2}{l^2} l = \frac{1}{2} G I_p \frac{\beta^2}{l}$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 J_1 \vartheta^2(x)\Big|_{x=0} + \frac{1}{2} \omega^2 J_2 \vartheta^2(x)\Big|_{x=l}$$

$$+ \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^l \underbrace{J}_{\rho} \vartheta^2(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 J_1 \beta^2 \alpha^2 + \frac{1}{2} \omega^2 J_2 \beta^2 (1+\alpha)^2$$

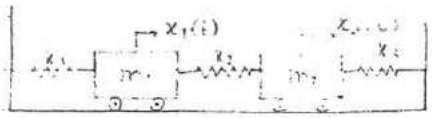
$$+ \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho \beta^2 \left(\frac{x}{l} + \alpha\right)^2 dx$$

$$V_{max} = T_{max} \Rightarrow \omega^2 = \frac{f_1(\beta)}{f_2(\alpha, \beta)}$$

Parte teórica:

2)

3)



[illegible]

Conclui-se que as condições iniciais x_{10} e $\dot{x}_{10}$ têm de ser nulas.

4)

Aplicando a 2.ª lei de Newton do movimento a um elemento infinitesimal:

$$(P(x,t) + dP(x,t)) - P(x,t) + f(x,t) = \rho A\, dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Após deformação:

$$dP(x,t) + f(x,t) = \rho A(x)\, dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Relação deformação longitudinal ↔ força: $P(x,t) = EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

Para uma barra de secção constante: $EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$

$u(x,t) = U(x)\, q(t)$

Derivadas da solução $u(x,t) = U(x)\, g(t)$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{dU(x)}{dx} g(t) \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = U(x) \frac{d^2 g(t)}{dt^2}$$

Introdução da solução e derivadas na equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA \frac{dU(x)}{dx} g(t) \right) = \rho A\, U(x) \frac{d^2 g(t)}{dt^2}$$

Após rearranjo:

$$\frac{1}{\rho A\, U(x)} \frac{d}{dx}\left(EA \frac{dU(x)}{dx} \right) = \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2}$$

O primeiro membro depende somente de x e o 2.º depende somente de t.
A equação anterior só é verificada para todo o x e todo o t caso ambos os membros sejam iguais a uma constante λ.

$$\frac{1}{\rho A U(x)} \frac{d}{dx}\left(EA \frac{dU(x)}{dx} \right) = \lambda \qquad \text{e} \quad \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \lambda$$

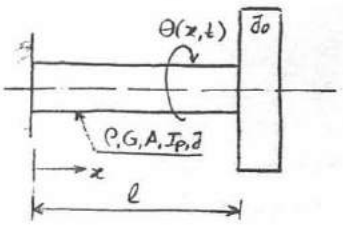
5) $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \dot{x}(t)$

$x(t) = C e^{st}$

a) Equação característica: $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$

b)

4.



$$-\frac{d}{dx}\left(GI_p(x)\frac{d\theta(x)}{dx}\right) = \omega^2 \rho J(x)\theta(x)$$

Soluções: $(\omega_r^2, \theta_r(x))$ $r = 1, 2, \dots \infty$

a) Condições fronteira:

1) $\theta(0) = 0$

2) $GI_p \frac{d\theta(x)}{dx}\Big|_{x=\ell} = -\omega^2 J_0 \theta(x)\Big|_{x=\ell}$

b) Propriedades de ortogonaudade em relação à inércia e à rigidez

$$-\frac{d}{dx}\left(GI_p(x)\frac{d\theta(x)}{dx}\right) = \omega^2 \rho J(x)\theta(x)$$

Considerando 2 soluções distintas: $(\omega_r^2, \theta_r(x))$ e $(\omega_s^2, \theta_s(x))$

$$-\frac{d}{dx}\left(GI_p(x)\frac{d\theta_r(x)}{dx}\right) = \omega_r^2 \rho J(x)\theta_r(x)$$

$$-\frac{d}{dx}\left(GI_p(x)\frac{d\theta_s(x)}{dx}\right) = \omega_s^2 \rho J(x)\theta_s(x)$$

Multipicando por $\theta_r(x)$ e $\theta_s(x)$ e integrando para o comprimento do veio:

$$-\int_0^\ell \theta_s(x)\frac{d}{dx}\left(GI_p(x)\frac{d\theta_r(x)}{dx}\right) = \omega_r^2 \int_0^\ell \rho J(x)\theta_s(x)\theta_r(x)\,dx$$

$$-\int_0^\ell \theta_r(x)\frac{d}{dx}\left(GI_p(x)\frac{d\theta_s(x)}{dx}\right) = \omega_s^2 \int_0^\ell \rho J(x)\theta_r(x)\theta_s(x)\,dx$$

Após integração por partes:

$$\theta_s(x) GI_p(x)\frac{d\theta_r(x)}{dx}\Big|_0^\ell + \int_0^\ell \frac{d\theta_s(x)}{dx} GI_p(x)\frac{d\theta_r(x)}{dx}\,dx = \omega_r^2 \int_0^\ell \rho J(x)\theta_s(x)\theta_r(x)\,dx$$

$$\theta_r(x) GI_p(x)\frac{d\theta_s(x)}{dx}\Big|_0^\ell + \int_0^\ell \frac{d\theta_r(x)}{dx} GI_p(x)\frac{d\theta_s(x)}{dx}\,dx = \omega_s^2 \int_0^\ell \rho J(x)\theta_r(x)\theta_s(x)\,dx$$

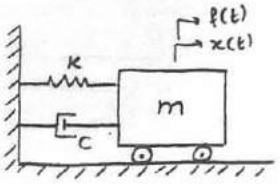
Subtraindo as expressões anteriores:

$$(\omega_k^2 - \omega_s^2)\int_0^\ell \rho J(x)\theta_r(x)\theta_s(x)\,dx = \int_0^\ell \frac{d\theta_s(x)}{dx} GI_p(x)\frac{d\theta_r(x)}{dx}\,dx - \int_0^\ell \frac{d\theta_r(x)}{dx} GI_p(x)\frac{d\theta_s(x)}{dx} = 0$$

Vibraçoes mecânicas - 95-01-18

Parte teórica:

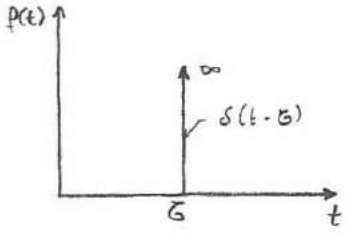
1)

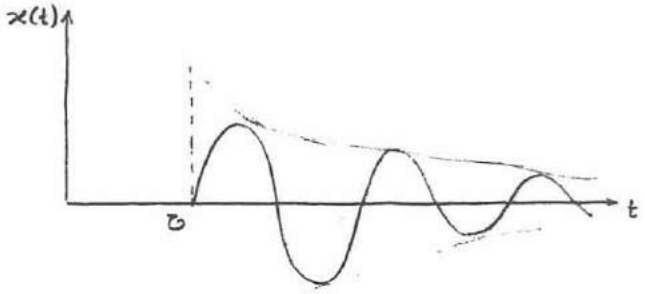


$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

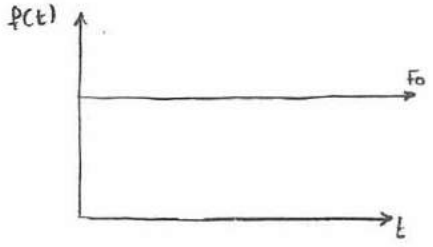
a) Impulso unitário para $t = \tau$ ($\delta(t-\tau)$)

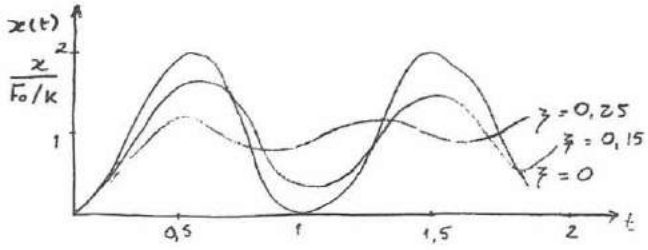
$f(t)$:



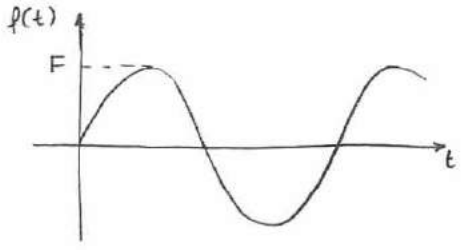


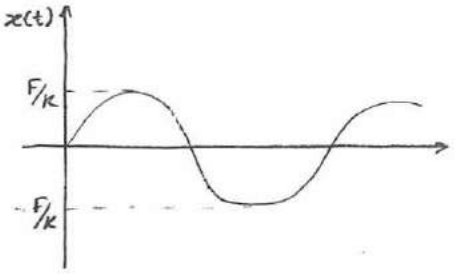
b) Degrau unitário para $t = \tau$ ($\mu(t-\tau)$)





c) $f(t) = F\,\mathrm{sen}\,\omega t$ com $\omega \ll \omega_n$ ($\beta = 0$) $\Rightarrow$ em fase





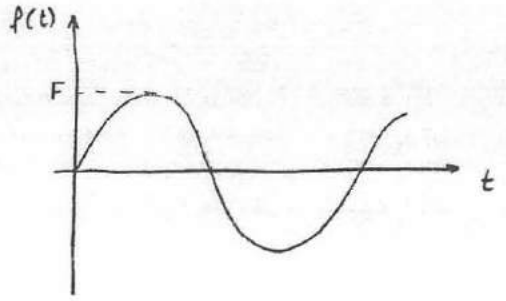
Resposta total: $x(t) = \frac{F}{k}$ ($x(t) = \frac{F}{k}\,\mathrm{sen}\,\omega t$)

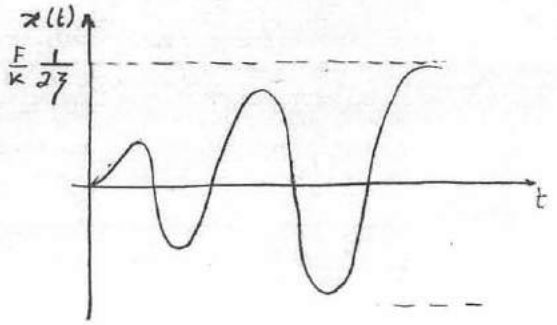
$$|x| = \frac{F/k}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad \text{como } \omega \ll \omega_n \Rightarrow |x| = \frac{F}{k}$$

d) $f(t) = F\,\mathrm{sen}\,\omega t$ com $\omega = \omega_n$ ($\beta = 1$)

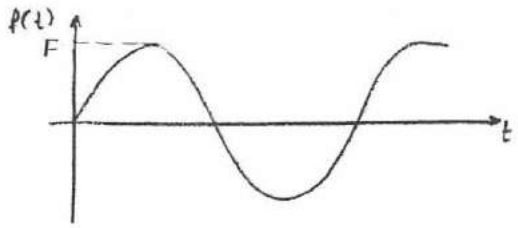
$$|x| = \frac{F/k}{\sqrt{0 + (2\zeta \times 1)^2}} = \frac{F/k}{\sqrt{4\zeta^2}} = \frac{F/k}{2\zeta}$$

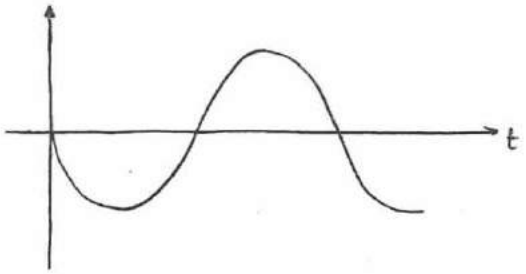
$\beta = 1 \Rightarrow$ quadratura de fase ($\phi = \pi/2$)



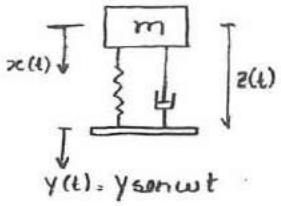


e) $p(t) = F \operatorname{sen}\omega t$ com $\omega >> \omega_n$ $\beta >> 1 \rightarrow$ oposição de fase





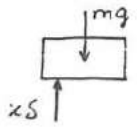
2)



Transmissão passiva

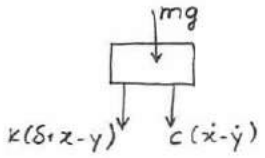
a) Equação do movimento absoluto $x(t)$ da massa

Diagrama de corpo livre na posição de equilíbrio estático:



$mg = k\delta$

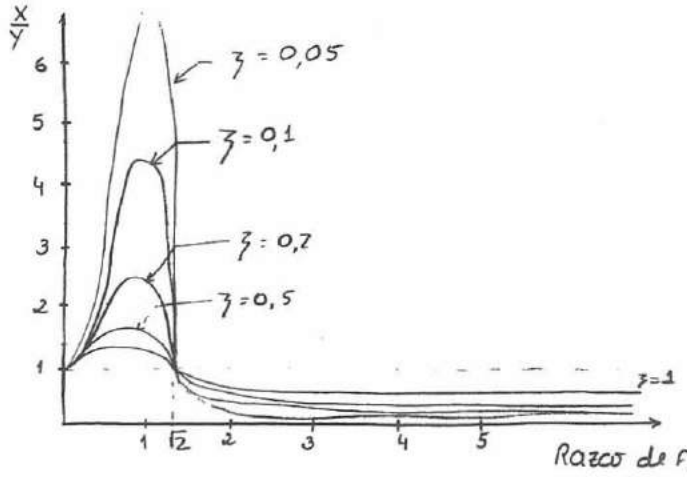
Diagrama de corpo livre na posição de equilíbrio dinâmico:



$$mg - k\delta + k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) + m\ddot{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) + m\ddot{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

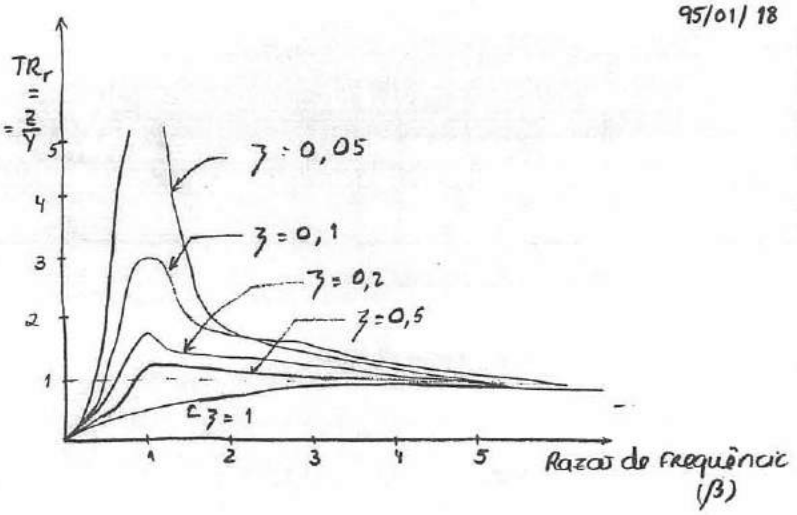
b) Transmissibilidade absoluta (TRa):

$$TR = \frac{X(\omega)}{Y} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$



c) Transmissibilidade relativa:

$$TR_r = \frac{Z(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$



d) $z(t) = x(t) - y(t)$

$$X(\omega) = Y \frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} \qquad Z(\omega) = Y \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}$$

$$Y(\omega) = Y$$

$$X(\omega) - Y(\omega) = Y\frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} - Y \neq Z(\omega)$$

3)

a) Para uma função $\phi(x)$ que verifica as condições fronteira mas não verifica a equação diferencial:

$$R(\phi(x)) = \frac{\int_0^\ell G I_p(x)\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^\ell J(x)\,\phi^2(x)\,dx}$$

quociente de Rayleigh

$\Rightarrow R(\phi(x))$ é um escalar que depende de $\phi(x)$

$R(\phi(x))$ possui um valor estacionário sempre que $\phi(x)$ se encontra na vizinhança de uma função natural $\Theta_r(x)$.
Na vizinhança do modo fundamental $(\omega_1^2; \Theta_1(x))$ apresenta um valor mínimo.

b) Sistemas lineares discretos e sistemas contínuos:

Tanto num como no outro a frequência ω é obtida pela divisão da energia potencial pela energia cinética embora nos sist contínuos essa en. cinética seja a de referência
No caso dos sistemas lineares discretos é necessária a utilização de um vector arbitrário, do qual depende o quociente de Rayleigh.

c) Sistemas lineares discretos: $R(\{v\}) = \frac{\{v\}^T [k] \{v\}}{\{v\}^T [m] \{v\}}$ $\omega^2 = R(\{v\})$
em que v é o vector arbitrário

Sistemas contínuos: $\omega^2 = \frac{U_{máx}}{T^*}$ sendo $T^* = \frac{T_{máx}}{\omega^2}$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \operatorname{sen} \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sistema de 2 equações diferenciais acopladas, isto é, o movimento de m_1 influencia o de m_2 e vice-versa.
O movimento do sistema é caracterizado por $x_1(t)$ e $x_2(t)$ que definem as posições das massas m_1 e m_2 em qualquer instante t.

b)

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{F(t)\} e^{j\omega t}$$

Resposta em regime permanente ou estacionário:

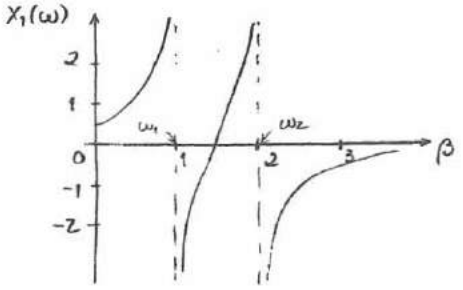
$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \quad \text{ou} \quad \{x(t)\} = \{X(\omega)\} e^{j\omega t}$$

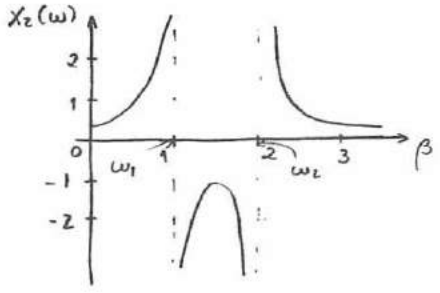
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & -\omega^2 m_2 + k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\omega^2[m] + [k]\right)\{X(\omega)\} = \{F\}$$

$$X_1(\omega) = \frac{(k_2 - \omega^2 m_2) F_1}{((k_1+k_2) - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) + k_2}$$

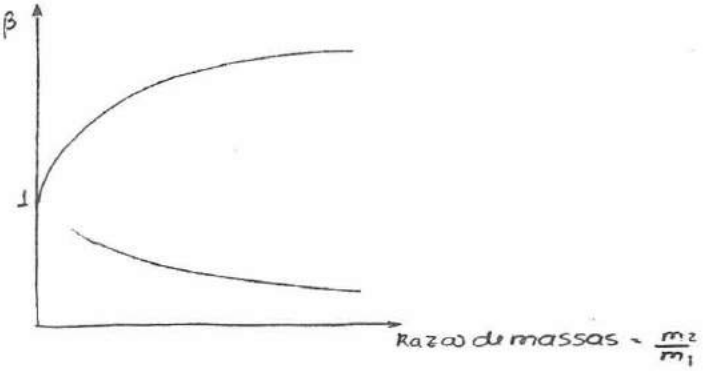
$$X_2(\omega) = \frac{k_2 F_1}{((k_1+k_2) - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) + k_2}$$



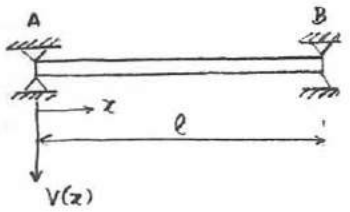


As amplitudes $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$ tendem para infinito quando $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$.
$\omega = \omega_1$ e $\omega = \omega_2$ são condições de ressonância para o sistema.
Existe um valor de ω para o qual $X_1(\omega)$ se anula.

c)



3)



a) Equação de vibração de flexão da viga

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right]+\mu(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=0 \Leftrightarrow c^2\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=0$$

Condições Fronteira:

1.º) $w(0,t)=0$
2.º) $EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)=0$

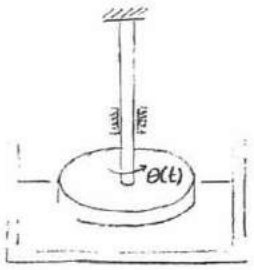
3.º) $w(\ell,t)=0$
4.º) $EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\ell,t)=0$

b) Energia potencial elástica

$$U_{max}=\frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI\left(\frac{d^2V(z)}{dx^2}\right)^2 dz$$

Parte prática:

1)



$J = 0{,}6\ kg\,m^2$
$G = 34{,}5\times10^9\ N/m^2$
$\ell = 400\ mm = 0{,}4\ m$
$d = 0{,}009\ m$

a) Decremento logarítmico:

$$\delta=\frac{1}{k}\ln\frac{x(t)}{x(t+kT)}=\frac{1}{1}\ln\frac{1{,}2}{0{,}1}=2{,}485$$

Razão de amortecimento:

$$\zeta=\frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}}=\frac{2{,}485}{\sqrt{4\pi^2+2{,}485^2}}=0{,}368$$

b) Frequências angulares naturais:

$$K_t=\frac{M}{\theta}=\frac{M'}{\frac{M\ell}{GI}}=\frac{GI}{\ell}$$

Não amortecida:

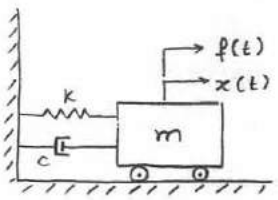
$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{J}} \qquad K_t=\frac{M}{\theta}=\frac{GI}{\ell}=\frac{G}{\ell}\cdot\frac{\pi d^4}{32}=\frac{34{,}5\times10^9\times\pi\times0{,}009^4}{32\times0{,}4}=55{,}55\ Nm/rad$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{55{,}55}{0{,}6}}=9{,}62\ rad/s$$

Vibrações mecânicas - 95.02.03

Parte teórica:

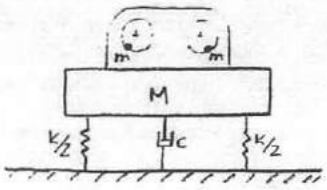
1)



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

a) Equação de frequência do sistema ou equação característica

2)



a) Para que melhore o comportamento do sistema é preciso que a sua Frequência se aproxime da Frequência natural.

$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$ Para tal é necessário diminuir ζ.

$\zeta = \frac{c}{c_R}$ $\Rightarrow$ c_R tem de aumentar

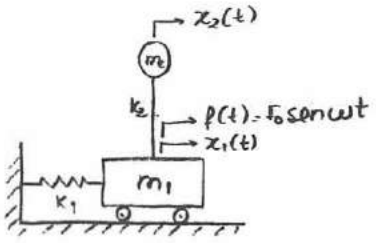
$c_R = 2\sqrt{km}$ $\Rightarrow$ Conclui-se que a Rigidez deve ser aumentada

b) Se k diminui $\Rightarrow$ Transmissibilidade diminui (aumenta a eficiência do sistema de isolamento)

Se c aumenta $\Rightarrow$ Transmissibilidade diminui

Se M " $\Rightarrow$ " diminui

3)



a) Movimentos de resposta:

Formalismo de Lagrange: $L = T - V$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \bar{Q}_i$$

$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2$

$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2$

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2)$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = +k_2 (x_1 - x_2)$

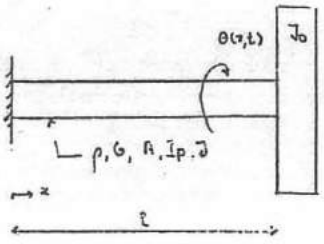
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$

$\bar{Q}_1 = F_0 \operatorname{sen} \omega t$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F_0 \operatorname{sen} \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 (x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

4.



$$-\frac{d}{dx}\left(G I_p(x)\,\frac{d\theta(x)}{dx}\right) = \omega^2 J(x)\,\theta(x)$$

$(\omega_n\,;\,\theta_n(x)) \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty$

a)

Condições de fronteira:

- $\theta(0) = 0$
- $G I_p \frac{d\theta}{dx}(x)\Big|_{x=\ell} = -J_0 \ddot{\theta}_{x=\ell} = J_0 \omega^2 \theta_{x=\ell}$

Como $\frac{d^2 g}{dt^2} = -\omega^2 g(t)$ obtemos $\boxed{-G I_p \frac{d\theta(x)}{dx}\Big|_{x=\ell} = \omega^2 J_0 \theta(x)\Big|_{x=\ell}}$

$= \omega^2 \ell g_0 (\theta/n)_{x=\ell}$

b)

Soluções distintas do problema característico.

$(\omega_n^2, \theta_n(x)) \qquad (\omega_m^2, \theta_m(x))$

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(G I_p(x)\,\frac{d\theta_n(x)}{dx}\right) = \omega_n^2 J(x)\,\theta_n(x) \\ -\frac{d}{dx}\left(G I_p(x)\,\frac{d\theta_m(x)}{dx}\right) = \omega_m^2 J(x)\,\theta_m(x) \end{cases}$$

Multiplicando por $\theta_n(x)$ e $\theta_m(x)$ e integrando para o comprimento do veio

$$\begin{cases} -\int_0^\ell \theta_n(x)\,\frac{d}{dx}\left(G I_p(x)\,\frac{d\theta_n(x)}{dx}\right) dx = \omega_n^2 \int_0^\ell \theta_n(x)\,J(x)\,\theta_n(x)\,dx \\ -\int_0^\ell \theta_m(x)\,\frac{d}{dx}\left(G I_p(x)\,\frac{d\theta_m(x)}{dx}\right) dx = \omega_m^2 \int_0^\ell \theta_m(x)\,J(x)\,\theta_m(x)\,dx \end{cases}$$

Após integração por partes

$$\begin{cases} \theta_n(x)\,G I_p(x)\,\frac{d\theta_n(x)}{dx}\Big|_0^\ell + \int_0^\ell \frac{d\theta_n(x)}{dx}\,G I_p(x)\,\frac{d\theta_n(x)}{dx} = \omega_n^2 \int_0^\ell \theta_n(x)\,J(x)\,\theta_n(x)\,dx \\ \theta_m(x)\,G I_p(x)\,\frac{d\theta_m(x)}{dx}\Big|_0^\ell + \int_0^\ell \frac{d\theta_m(x)}{dx}\,G I_p(x)\,\frac{d\theta_m(x)}{dx} = \omega_m^2 \int_0^\ell \theta_m(x)\,J(x)\,\theta_m(x)\,dx \end{cases}$$

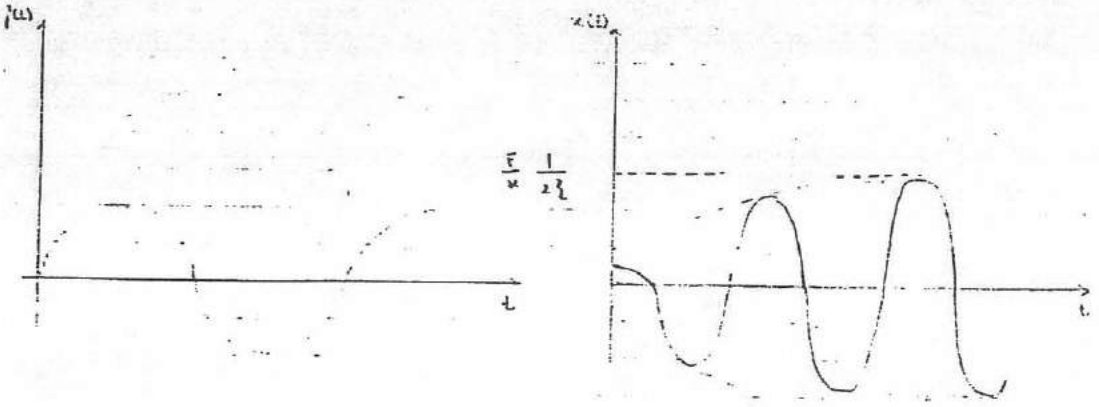
Subtraindo as expressões anteriores

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2)\int_0^\ell \theta_n(x)\,J(x)\,\theta_m(x)\,dx = \int_0^\ell \frac{d\theta_m(x)}{dx}\,G I_p(x)\,\frac{d\theta_n(x)}{dx}\,dx - \int_0^\ell \frac{d\theta_n(x)}{dx}\,G I_p(x)\,\frac{d\theta_m(x)}{dx}\,dx$$

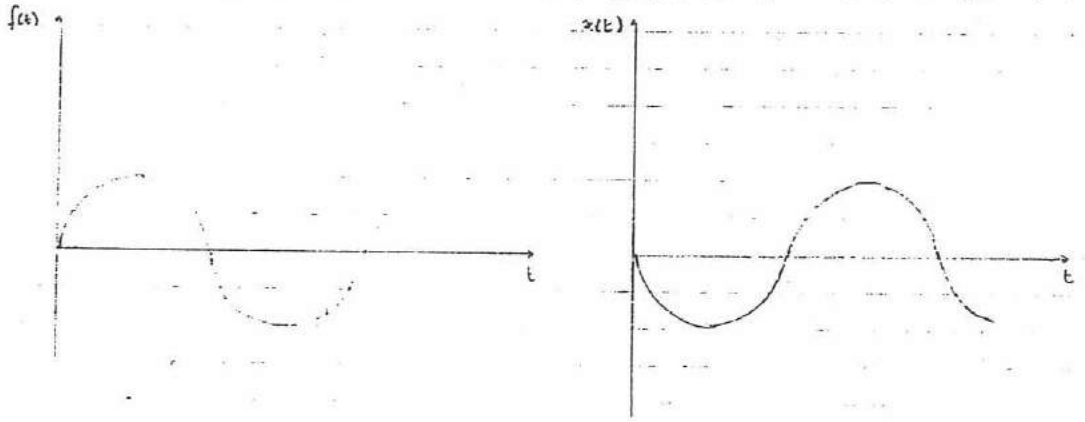
$= 0$

d) Solicitação $f(t) = F \operatorname{sen} \omega t$ com $\omega = \omega_n$

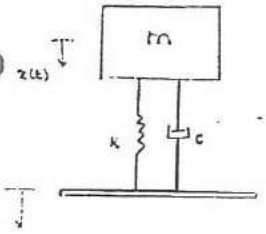
$\beta = 1 \Rightarrow$ quadratura de fase



e) Solicitação $f(t) = F \operatorname{sen} \omega t$ com $\omega \gg \omega_n$ ..... $\beta \gg 1 \Rightarrow$ oposição de fase



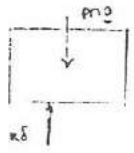
2.



$y(t) = Y \operatorname{sen} \omega t$

a)

Diagrama de corpo livre na posição de equilíbrio estático.



$mg = k\delta$

Diagrama de corpo livre na posição de eq. dinâmico

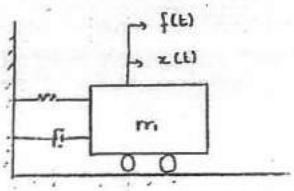


$$mg - k\delta + m\ddot{x} + k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) = 0$$

TESTE 16.01.95 PARTE TEÓRICA

Pedro 2003

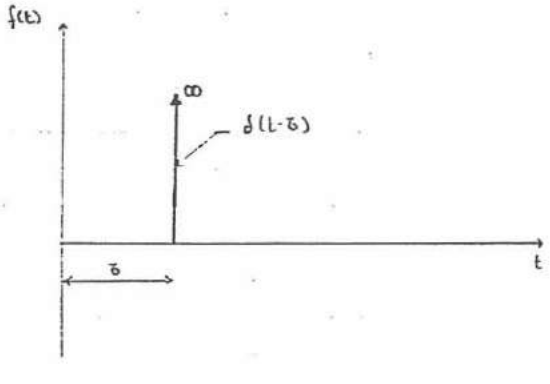
1.

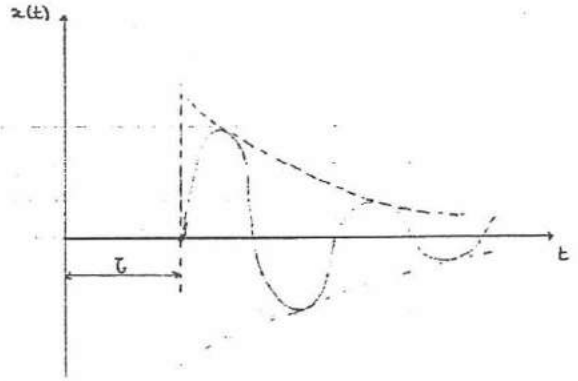


$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

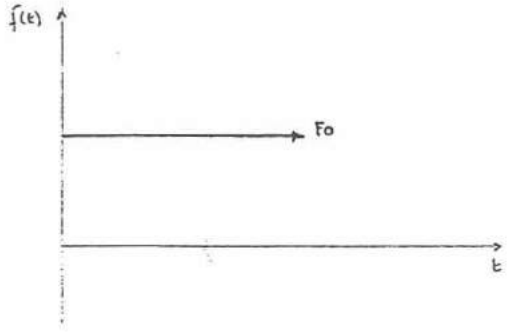
Representação gráfica da solicitação $f(t)$ e da resposta $x(t)$ do sistema, em condições iniciais nulas, para as seguintes solicitações:

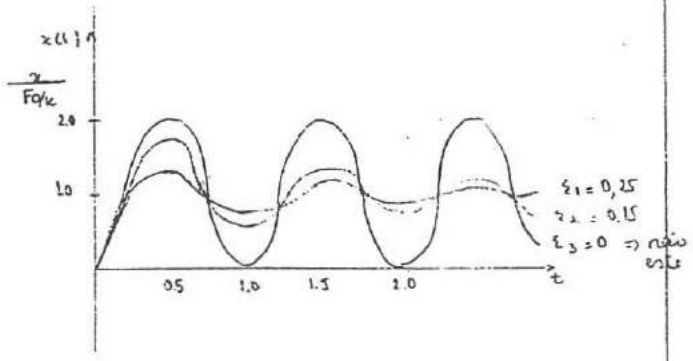
a) impulso unitário aplicado no instante $t = \tau$ ($\delta(t-\tau)$):



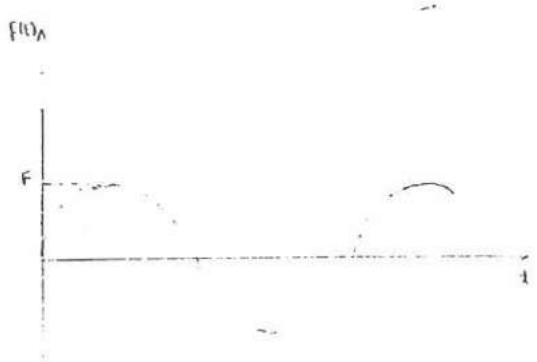


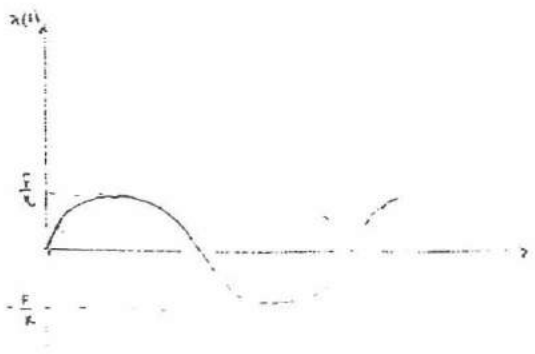
b) degrau unitário aplicado no instante $t = \tau$ ($\mu(t-\tau)$):

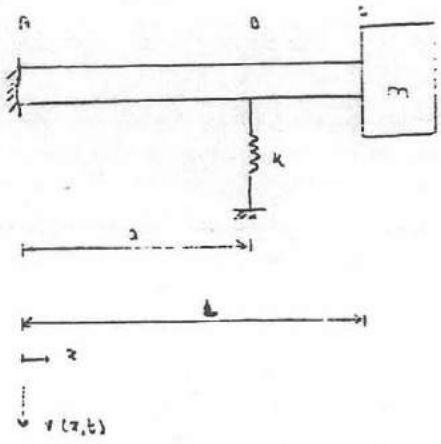




c) solicitação $f(t) = F\operatorname{sen}\omega t$ em $\omega = \omega_n$ ⇒ resposta total $x(t) \to \frac{F}{k}$ $\left(x(t) = \frac{F}{k}\operatorname{sen}\omega t\right)$





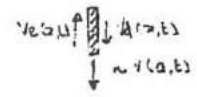


c)

Condições - fronteira:

- engastamento: $\boxed{\begin{array}{l} v(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0 \end{array}}$

- para $x = a$: $EI \dfrac{\partial^2 v(a,t)}{\partial x^2} = 0$



$V_e(a,t) - V_d(a,t) = m\,\ddot{v}(a,t)$ e $V(x,t) = \dfrac{\partial M(x,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(EI(x) \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)$

Como as vigas apresentam a mesma rigidez $\Rightarrow V_e = V_d \Rightarrow m\ddot{v}(a,t) = 0$

- [illegible] $\dfrac{\partial}{\partial x}$ [illegible] $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ [illegible] $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ [illegible]

EI [illegible] $= 0$

a) $V(x) = \delta \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2L} x\right)$

Condições de fronteira geométricas: $v(0,t) = 0 \Rightarrow V(0) = 0$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0 \Rightarrow \dfrac{dV}{dx}(0) = 0$

$V(0) = \delta \operatorname{sen} 0 = 0$

$\dfrac{dV}{dx}(x) = \delta \dfrac{\pi}{2L} \cos\left(\dfrac{\pi}{2L} x\right) \rightarrow \dfrac{dV}{dx}(0) = \dfrac{\delta\pi}{2L} \Rightarrow$ esta função não satisfaz as condições de fronteira geométricas

b) $V(x) = \delta\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{2L} x\right)$

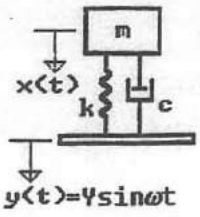
$V(0) = \delta(1-1) = 0$

$\dfrac{\pi}{2L}\delta \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2L} x \rightarrow \dfrac{dV}{dx}(0) = 0 \Rightarrow$ [illegible]

Como $\omega r^2 = \omega_r^2$

$$\int_0^l \theta_r(x)\, J(x)\, \theta_s(x)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad r \neq s : \text{ortogonalidade em relação à massa}$$

$$\int_0^l \frac{d\theta_r(x)}{dx}\, EI_p(x)\, \frac{d\theta_s(x)}{dx}\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad r \neq s : \text{ortogonalidade em relação à rigidez}$$



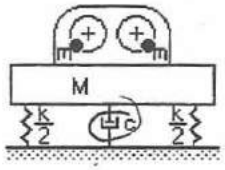
1) O sistema representado na figura está sujeito a um movimento harmónico da base (transmissão passiva).

a) Estabelecer a equação diferencial do movimento absoluto x(t) da massa.

b) Definir e representar graficamente a transmissibilidade absoluta TR_a em função da frequência de excitação e para diferentes valores da razão de amortecimento.

c) Definir e representar graficamente a transmissibilidade relativa TR_r em função da frequência de excitação e para diferentes valores da razão de amortecimento.

d) O movimento harmónico da massa relativamente à base, z(t), é dado pela relação, z(t)=x(t)-y(t). As amplitudes Z(ω), X(ω), Y(ω), de cada um destes movimentos verificam esta relação? Justificar.



2) O funcionamento do equipamento representado na figura é acompanhado de vibrações de grande amplitude. A análise do sistema mostra que a velocidade de funcionamento do sistema é bastante próxima da frequência de ressonância de amplitude.

a) Qual a alteração adequada para a rigidez da suspensão de modo a melhorar o comportamento do sistema ?

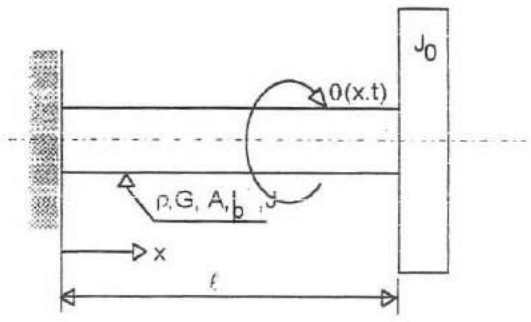
b) Discutir a eficiência do isolamento em função dos parâmetros M, k e c para uma determinada frequência de funcionamento. Acompanhar a discussão com gráficos ilustrativos.

3) Para estimar a frequência fundamental de vibração de um sistema, o quociente de Rayleigh constitui uma técnica bastante prática.

a) Indicar a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh.

b) Estabelecer um "paralelo" entre as aproximações utilizadas no quociente de Rayleigh para sistemas lineares discretos e sistemas contínuos.

c) Escrever as expressões genéricas do quociente de Rayleigh para sistemas lineares discretos e sistemas contínuos.



4) A figura representa um veio de secção constante em torção, apresentando uma das extremidades fixa e na outra um volante indeformável de momento de inércia J_0. O problema característico é definido pela equação diferencial

$$-\frac{d}{dx}\left(GI_p(x)\frac{d\theta(x)}{dx}\right) = \omega^2 J(x)\theta(x)$$

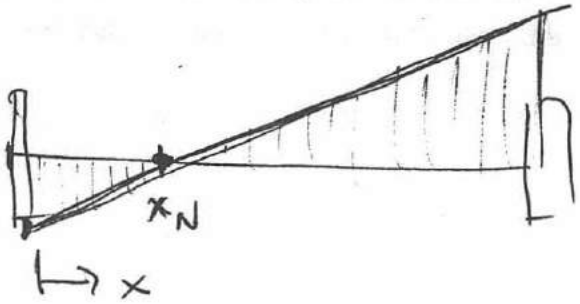
e respectivas condições de fronteira, e possui soluções $(\omega_r;\theta_r(x))\ r = 1,2,\ldots,\infty$.

a) Escrever as condições de fronteira que devem ser verificads pelas soluções $(\omega_r;\theta_r(x))\ r = 1,2,\ldots,\infty$.

b) A partir da equação característica e das condições de fronteira, estabelecer as propriedades de ortogonalidade das formas naturais de vibração $\theta_r(x)\ r = 1,2,\ldots,\infty$ em relação à inércia e à rigidez.

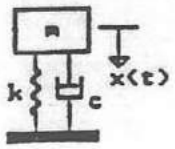
$$\theta(x) = \beta x\left(\frac{x}{\ell} + \alpha\right)$$

$$\theta(x) = 0 \Longrightarrow \beta\left(\frac{x}{\ell} + \alpha\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{x_N}$$



VIBRAÇÕES Exame de 13.09.91 - 1990/91

Parte Teórica (6 valores)



1/ A figura representa o modelo de um sistema amortecido com um grau de liberdade.

a/ Estabelecer a equação característica ou de frequência.

b/ Discutir a natureza das raízes da equação característica em função do valor da razão de amortecimento ξ.

c/ Representar no plano complexo o lugar geométrico das raízes da equação característica.

2/ Indicar as propriedades do quociente de Rayleigh e referir a sua utilidade prática em análise de vibrações.

3/ Escrever a equação de onda para as vibrações de torção de um veio de secção circular de raio variável r(x). Mostrar que existem soluções de variáveis separáveis da forma $\theta(x,t)=\Theta(x)f(t)$.

$$c^2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\theta(x,t) = \Theta(x)\cdot f(t)$$

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = \frac{d\Theta(x)}{dx} f(t)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} f(t)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = \Theta(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

$$c^2 \frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} f(t) = \Theta(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

$$\frac{c^2}{\Theta(x)} \frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} = \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f}{dt^2}$$

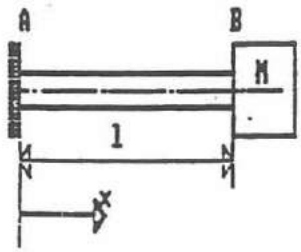
C12

Parte Teórica (6 valores)

1/ Para um sistema amortecido a um grau de liberdade,

a/ definir frequência de ressonância de amplitude e frequência de ressonância de fase indicando os respectivos valores;.

b/ representar o factor de amplificação dinâmica μ em função da razão de frequência $\beta=\omega/\omega_n$ para diferentes valores da razão de amortecimento viscoso ξ no intervalo [0;0.85]. Indicar na figura o lugar geométrico dos valores máximos do factor de amplificação dinâmica.



2/ Na figura ao lado representa-se uma barra com a extremidade A (x=0) fixa e com uma massa M concentrada na extremidade B (x=l). A barra de comprimento l possui secção recta uniforme de área A e material de módulo de elasticidade E e massa especifica ρ.

Estabelecer as propriedades de ortogonalidade (em relação à massa e à rigidez) associadas às formas naturais de vibração longitudinal u(x,t) da barra representada.

VIBRAÇÕES — AULAS PRÁTICAS

27-09-

ENGº MARCELO MOURA

AULA PRÁTICA Nº 1.

$f(t) = f(t + nt)$

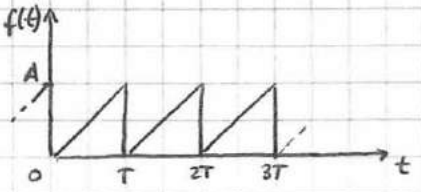
$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t + a_2 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t + \dots$

ou

$$\left[f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t) \right]$$

↳ SÉRIE DE FOURIER

1.



$y = mx + b \Rightarrow f(t) = \frac{A}{T} t \quad \wedge \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

COEFICIENTES DA S. FOURIER

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\,dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t\,dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} n\omega t\,dt \end{cases}$$

a)

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t\,dt =$$

$$= \frac{2A}{T^2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^T = \frac{A}{T^2} \times T^2 \Rightarrow \boxed{a_0 = A}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t\,dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t \cos n\omega t\,dt = \frac{2A}{T^2} \int_0^T t \cos n\omega t\,dt =$$

PRIM. POR PARTES

$u = t$
$du = dt$
$dv = \cos n\omega t\,dt$
$v = + \frac{1}{n\omega} \operatorname{sen} n\omega t$

$$= \frac{2A}{T^2} \left[\left[\frac{1}{n\omega} \operatorname{sen} n\omega t \times t \right]_0^T - \int_0^T \frac{1}{n\omega} \operatorname{sen} n\omega t\,dt \right] =$$

$$= \frac{2A}{T^2} \left[\frac{T}{n\omega} \operatorname{sen} n\omega T + \frac{1}{(n\omega)^2} \cos n\omega t \Big|_0^T \right] =$$

$$= \frac{2A}{T^2} \times \frac{T}{n\omega} \operatorname{sen} n\omega T + \frac{2A}{T^2} \left[\frac{1}{(n\omega)^2} \cos n\omega T - \frac{1}{(n\omega)^2} \right] =$$

$$= \frac{2A}{\pi n \frac{2\pi}{T}} \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} \cdot T + \frac{2A}{T^2} \left[\frac{1}{\left(n \frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \cos n \frac{2\pi}{T} \cdot T - \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{A}{n\pi} \underbrace{\operatorname{sen} 2n\pi}_{\to 0} + \frac{2A}{T^2 \cdot \left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2} \cdot \cos 2n\pi - \frac{2A}{T^2} \times \frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2} = \frac{2A}{(2n\pi)^2} - \frac{2A}{(2n\pi)^2} \Rightarrow \boxed{a_n = 0}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} n\omega t\,dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t \operatorname{sen} n\omega t\,dt = \frac{2A}{T^2} \int t \operatorname{sen} n\omega t\,dt =$$

$u = t \Rightarrow du = dt$
$dv = \operatorname{sen} n\omega t\,dt \Rightarrow$
$v = -\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t$

$$= \frac{2A}{T^2} \left[\left[-\frac{t}{n\omega} \cos n\omega t \right]_0^T + \int \frac{1}{n\omega} \cos n\omega t\,dt \right] =$$

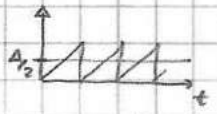
$$= \frac{2A}{T^2} \left[-\frac{T}{n\omega} \cos n\omega T + \frac{1}{(n\omega)^2} \underbrace{\operatorname{sen} n\omega t}_{\to 0} \Big|_0^T \right] = -\frac{2A}{T^2} \times \frac{T}{n\frac{2\pi}{T}} \Rightarrow \boxed{-\frac{A}{n\pi} - b_n}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t)$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{A}{n\pi} \operatorname{sen} n\omega t\right)$$

b)

$n=1$: 1º termo $\quad f(t) = \frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}$



$$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \operatorname{sen} \omega t - \frac{A}{2\pi} \operatorname{sen} 2\omega t - \frac{A}{3\pi} \operatorname{sen} 3\omega t$$

$$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \operatorname{sen} \omega t = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$$

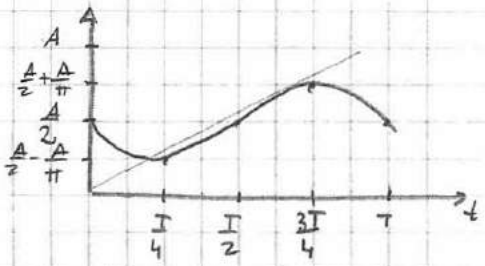
$t=0 \Rightarrow f(t) = \frac{A}{2}$

$t = \frac{T}{2} \Rightarrow f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{A}{2}$

$t = T \Rightarrow f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \cdot T = \frac{A}{2}$

$t = \frac{T}{4} \Rightarrow f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}$

$t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}$



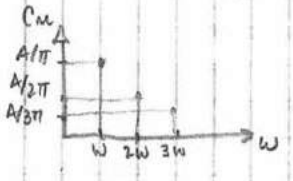
c) $\quad f(t) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos(m\omega t - \phi_m)$ $\qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

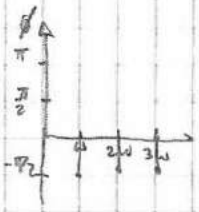
$C_0 = \frac{a_0}{2}$ $\qquad f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\cos n\omega t \cos\phi - \operatorname{sen} n\omega t \cdot \operatorname{sen}\phi)$

$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\omega t \cos\phi - C_n \operatorname{sen} n\omega t \operatorname{sen}\phi)$

$$\begin{cases} a_m = C_m \cos\phi \\ b_m = C_m \operatorname{sen}\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_m^2 + b_m^2 = C_m^2 (\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) \\ \operatorname{sen}\phi = \frac{b_m}{C_m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_m = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \operatorname{sen}\phi = \frac{b_m}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_m = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi = \text{arc sen } \frac{b_m}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \end{cases} \wedge C_0 = \frac{A}{2}$$

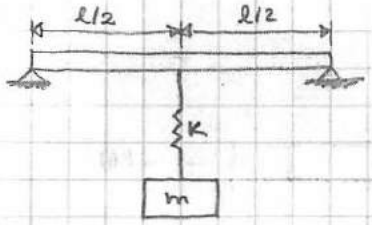




$$\begin{cases} a_m = 0 \\ b_m = -\frac{A}{n\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_m = |b_m| \\ \phi = \text{arc sen } 1 \end{cases} = \begin{cases} C_m = -\frac{A}{n\pi} \\ \phi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \left(\cos n\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

2.



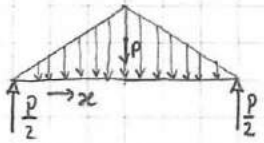
$$\delta = \frac{P l^3}{48 E I}$$

a) $K_{eq} = ?$

$F = Kx$

$$\boxed{\frac{1}{K_{mola}} + \frac{1}{K_{viga}} = \frac{1}{K_{eq.}}} \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_f}{EI}}$$

↓ Por ser flexão



$$0 \le x \le \frac{l}{2} \Rightarrow M_f = \frac{P}{2} x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_f}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Px}{2EI} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4EI} + C_1 \Leftrightarrow y = \frac{Px^3}{12EI} + C_1 x + C_2$$

Cond. Fronteiras em dy/dx:

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{Pl^2}{16EI}$$

Cond. Fronteiras em y:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y = \frac{Px^3}{12EI} - \frac{Pl^2}{16EI} x$$

Para $x = \frac{l}{2}$ (onde o deslocamento é maior) $\Rightarrow y = \frac{Pl^3}{96EI} - \frac{Pl^2}{16EI} \times \frac{l}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{Pl^3}{48EI}$

$$P = Kx \Leftrightarrow P = K \frac{Pl^3}{48EI} \Leftrightarrow K_v = \frac{48EI}{l^3}$$

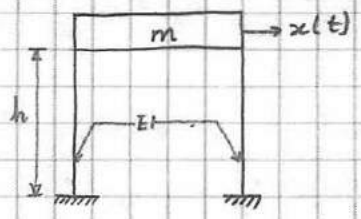
b) $$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_v} + \frac{1}{K} \Leftrightarrow \frac{1}{K_{eq}} = \frac{l^3}{48 \times 500} + \frac{1}{1000} \Leftrightarrow K_{eq} = 750 \text{ N/m}$$

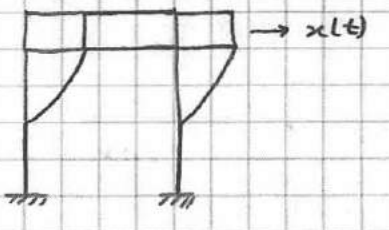
1.

4.10.96

AULA - PRÁTICA Nº 2.

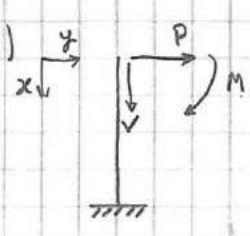
1.



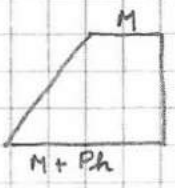


a)

i)



$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$



$M_f = M + Px$ $\quad x = h$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M+Px}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} - \frac{P}{EI}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{EI}x - \frac{P}{2EI}x^2 + C_1 \Rightarrow y = -\frac{M}{2EI}x^2 - \frac{P}{6EI}x^3 + C_1x + C_2$$

Condições Fronteiras em $\frac{dy}{dx}$:

$x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ Não há rotação

$x = h \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{Mh^2}{2EI} - \frac{P}{6EI}h^3 + \underbrace{C_1h}_{0} + C_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{h^2}{2EI}\left(M + \frac{Ph}{3}\right)$

$x = h \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{M}{EI}h - \frac{P}{2EI}h^2 + \underbrace{C_1}_{0} = 0 \Leftrightarrow M = -\frac{Ph}{2}$

$$y = +\frac{Ph}{2}\times\frac{x^2}{2EI} - \frac{P}{6EI}x^3 + \frac{h^2}{2EI}\left(-\frac{Ph}{2} + \frac{Ph}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{Ph}{4EI}x^2 - \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Ph^3}{12EI}$$

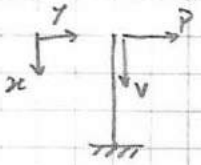
O deslocamento da viga é maior em $x = 0$ (P ☐ aplicação de P)

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{Ph^3}{12EI}$$

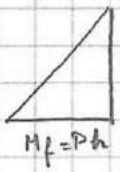
$$P = Kx \Leftrightarrow P = K\frac{Ph^3}{12EI} \Leftrightarrow K = \frac{12EI}{h^3}$$

(ii)

Não existe momento



$M_f = Px$



$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Px}{EI} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{2EI}x^2 + C_1 \Rightarrow y = -\frac{P}{6EI}x^3 + C_1x + C_2$$

c. Fronteiras:

$$x = h \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{P}{2EI}h^2 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{Ph^2}{2EI}$$

$$x = h \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{Ph^3}{6EI} + \frac{Ph^3}{2EI} + C_2 \Leftrightarrow C_2 = -\frac{Ph^3}{3EI}$$

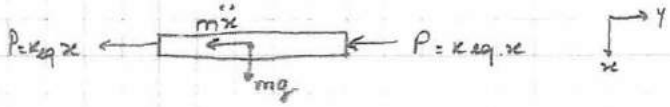
$$y = -\frac{P}{6EI}x^3 + \frac{Ph^2}{2EI}x - \frac{Ph^3}{3EI}$$

Para $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{Ph^3}{3EI}$

$$P = Kx \Leftrightarrow P = K\frac{Ph^3}{3EI} \Leftrightarrow K = \frac{3EI}{h^3}$$

b) EQ. MOVIMENTO LATERAL ?

Eq. Forças exteriores em y:



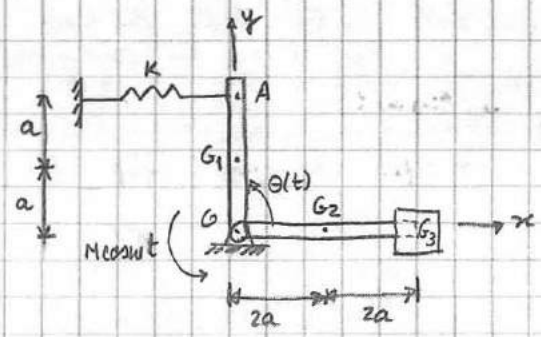
$$\boxed{m\ddot{x} + 2Kx = 0}$$

c)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = ?$$

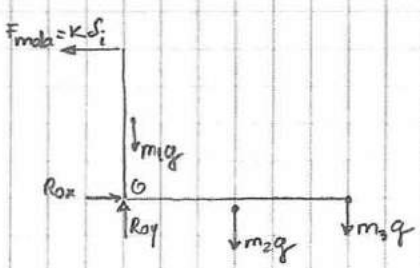
$2K = K_{eq}$
$m = m_{eq} = 1000\,Kg$
$EI = 163380\,Nm^2$
$h = 3\,m$

2.



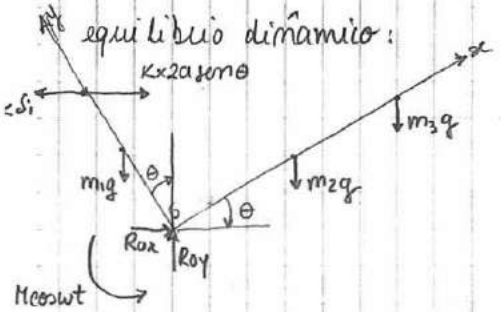
a)

equilíbrio estático:



$$m_2 g \times 2a + m_3 g \times 4a = K\delta_i \times 2a$$

equilíbrio dinâmico:



momento cinético

$$\Sigma \vec{M_O} = \vec{K_O} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M\cos\omega t - m_2 g \cos\theta \times 2a - m_3 g\, 4a \cos\theta + m_1 g \times a \times \operatorname{sen}\theta - K\, 2a \operatorname{sen}\theta \times 2a\cos\theta + K\delta_i\, 2a\cos\theta = \vec{K_O}$$

$$\boxed{I_O = I_G + md^2} \rightarrow \text{T. Steinner}$$

$$\boxed{\vec{K_O} = [I_O]\,\vec{\alpha}}$$

↳ propriedade pontos fixos

$$\vec{\alpha} = \ddot{\theta}$$

$$I_{O_1} = I_1 + m_1 a^2$$
$$I_{O_2} = I_2 + m_2\, 4a^2$$
$$I_{O_3} = I_3 + m_3\, 16a^2$$

$$I_O = I_{O_1} + I_{O_2} + I_{O_3}$$

$$I_O = I_1 + m_1 a^2 + I_2 + 4a^2 m_2 + I_3 + 16a^2 m_3$$

sendo $\vec{K_O} = \vec{K}\theta_1 + \vec{K}\theta_2 + \vec{K}\theta_3$

$$[I_O]\,\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = I_O\,\ddot{\theta}$$

$$I_O\ddot{\theta} + K4a^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - m_1 g a \operatorname{sen}\theta - [K\delta_i 2a - m_2 g 2a - m_3 g 4a]\cos\theta = M\omega\cos\omega t$$

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$
$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

θ é mto pequeno $\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0$ e $\cos\theta = 1$ (desprezam-se os restantes termos da S. Taylor)

$$I_0\ddot{\theta} + K4a^2\theta - m_1 g a\theta = M_m \cos\omega t \;\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \underbrace{I_0}_{m_{eq}}\ddot{\theta} + \underbrace{[K4a^2 - m_1 g a]}_{K_{eq}}\theta = M_m \cos\omega t$$

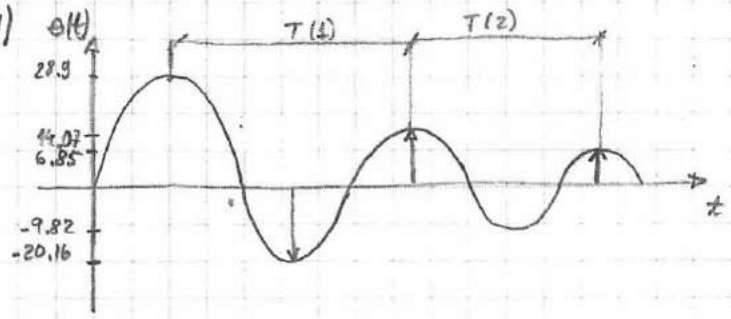
(K_{eq} é sempre a que multiplica pelo variável)

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{K4a^2 - m_1 g a}{I_0}}$$

c) $C_{CR} = 2\sqrt{K_{eq} M_{eq}}$

AULA PRÁTICA nº3:

1)



$$\delta = \frac{1}{K}\ln\frac{x(t)}{x(t+Kt)} \qquad \xi = \frac{C_{eq}}{C_{CR.eq}} \qquad \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}}$$

$$I_0\ddot{\theta} + Ca^2\dot{\theta} + K_t\theta = 0$$

a)

$T=T \Rightarrow K=1$

$T=2T \Rightarrow K=2$

① $\delta = \frac{1}{K}\ln\frac{x(t)}{x(t+Kt)}$

$$\delta = \frac{1}{1}\ln\frac{28.9}{14.07} = 0.72 \Rightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}} = \frac{0.72}{\sqrt{(2\pi)^2+0.72^2}} = 0.114$$

②

$$\delta = \frac{1}{1}\ln\frac{14.07}{6.85} = 0.72 \Rightarrow \xi = 0.114$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}} = 0.1138$$

b) $\omega_m = ?$ $\quad T_d = 1.3\,s$

$\omega = 2\pi f \;\wedge\; f = \frac{1}{T}$ $\qquad \omega_d = f(T_d)$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{1.3} = 4.833 \qquad \omega_m = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \leftrightarrow \omega_d = \omega_m\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_m = 4.86\ \text{rad/s}$$

c) $\underbrace{I_0}_{meq}\ddot{\theta} + \underbrace{ca^2}_{Ceq}\dot{\theta} + \underbrace{K_t}_{Keq}\theta = 0$ $\qquad \omega_m = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$

$\omega_m = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow 4,86 = \sqrt{\frac{2}{m_{eq}}} \Leftrightarrow m_{eq} = 8,45 \times 10^{-2} = I_0$

$I_0^1 = I_G + md^2$ → T. steiner

$I_G = \frac{1}{12} m l^2$

$I_0^1 = I_G + md^2 = \frac{1}{12} m l^2 + md^2 = \frac{1}{12} \times 1,25 \times 1 + 1,25 \times 0,12^2 = 0,044$

$I_0^C = I_0 - I_0^1 \Leftrightarrow I_0^C = 8,45 \times 10^{-2} - 0,044 \Leftrightarrow I_0^C = 0,0405\ Kg\ m^2$

d) $\xi = \frac{C_{eq}}{C_{cr\,eq}}$

$C_{eq} = ca^2$

$C_{cr\,eq} = 2\sqrt{K_{eq} m_{eq}} = 2\sqrt{2 \times 8,45 \times 10^{-2}} = 0,82$

$C_{eq} = \xi \times C_{cr\,eq} \Leftrightarrow C_{eq} = 0,1138 \times 0,82 = 0,0937$

$C_{eq} = ca^2 \Leftrightarrow C = \frac{0,0937}{(0,12)^2} = 6,5$

e) $\theta(t) = ?$

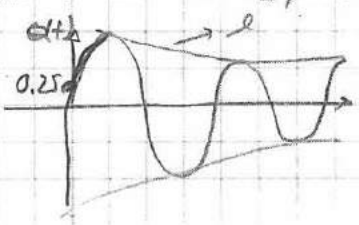
$\theta(t) = e^{-\xi \omega_n t} A \cos(\omega_d t - \phi)$

$A = \sqrt{\left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2 + x_0^2} = 1,09$ $\qquad \phi = \text{arc tg}\ \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d x_0} = 1,34$

$v_0 = \dot{\theta}_0$

$x_0 = \theta_0$

$\theta(t) = e^{-0,554t} \times 1,09 \times \cos(4,83t - 1,39)$



f) $\theta(t) = 0 \Rightarrow e^{-0.554t} \times 1.09 \times \cos(4.83t - 1.34) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(4.83t - 1.34) = 0 \Rightarrow 4.83t - 1.34 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

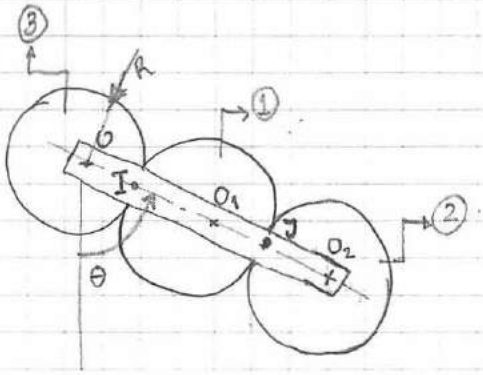
$\Leftrightarrow t = \frac{\pi/2 + 1.34}{4.83} = 0.6022\ s$

g) deslocamento máximo $\Rightarrow v = 0$

$v = \dot{\theta}(t) = -1.09 \times 0.554\, e^{-0.554t} \cos(4.83t - 1.34) + (-)4.83 \times 1.09 \times e^{-0.554t} \times \sin(4.83t - 1.34) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0.2536\ s$

2.



RODA 0 → FIXA
RODAS 1 e 2 → MÓVEIS

m', R } Rodas dentadas

m'', ℓ } manivela

a)

PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA: $\boxed{T + U = C^{te}}$

T → En. potencial
U → En. cinética

$\frac{d}{dt}(T+U) = 0$

$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad U = mg\Delta h$

$\vec{v}_{O_1/30} = \vec{v}^{\,\nearrow 0}_{G/30} + \vec{\omega}_{30} \times \vec{OO_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 2R\sin\theta \\ -2R\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2R\cos\theta\,\dot{\theta} \\ 2R\sin\theta\,\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$ (m/s)

$\vec{v}_{O_1/30} = \vec{v}_{O_1/10} = \vec{v}^{\,\nearrow 0}_{I/10} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{IO_1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2R\cos\theta\,\dot{\theta} \\ 2R\sin\theta\,\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{10} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r\sin\theta \\ -r\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 2R\cos\theta\,\dot{\theta} = \omega_{10} \times r\cos\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega_{10} = 2\dot{\theta}$

$\vec{\omega}_{10} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\dot{\theta} \end{Bmatrix}$ (rad/s)

CORPO 2:

$$\vec{v}_{O_2}{}_{20} = \vec{v}_{O_2/30} = \vec{\omega}_{30} \times \vec{OO_2} \quad (\Leftrightarrow \vec{v}_{O_2/30} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l\sin\theta \\ -l\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot\theta\, l\cos\theta \\ \dot\theta\, l\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_{J}{}_{20} = \vec{v}_{J}{}_{10} = \vec{\omega}_{10} \times \vec{IJ} \\ \vec{v}_{J}{}_{20} = \vec{v}_{O_2}{}_{20} + \vec{\omega}_{20} \times \vec{O_2J} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\dot\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 2R\sin\theta \\ -2R\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot\theta\, l\cos\theta \\ \dot\theta\, l\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{20} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4R\cos\theta\,\dot\theta \\ 4R\sin\theta\,\dot\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot\theta\, l\cos\theta - \omega_{20} R\cos\theta \\ \dot\theta\, l\sin\theta - \omega_{20} R\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$4R = l$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l\cos\theta\,\dot\theta = \dot\theta\, l\cos\theta - \omega_{20} R\cos\theta \\ l\sin\theta\,\dot\theta = \dot\theta\, l\sin\theta - \omega_{20} R\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \omega_{20} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{20} = \vec{0}}$$

$I_G(\text{disco}) = \frac{1}{2} m R^2$

$I_G(\text{barra}) = \frac{1}{12} m L^2$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad U = mg\Delta h$$

$$T^0 = \frac{1}{2} m' v_{G_0}^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = 0 \qquad \wedge \quad U^0 = m' g\, l\cos\theta$$

($v_{G_0} = 0$, $\omega = 0$)

$$T^1 = \frac{1}{2} m' \vec{v}_{O_1/30} + \frac{1}{2} m' R^2 \cdot \vec{\omega}_{10} = \qquad \wedge \quad U' = m' g \Delta h = m' g\,(2R - 2R\cos\theta) =$$

$$\wedge \cos\theta = \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$U' \simeq m' g R \theta^2$$

$$T^2 = \frac{1}{2} m' \vec{v}_{O_2} + \frac{1}{2} m' R^2 \times \vec{\omega}_{20} \quad (\vec{\omega}_{20} = 0)$$

$$U_2 = 0$$

$$T = m' R^2 \dot\theta^2 \left[11 + \frac{8}{3}\lambda\right] \qquad U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3$$

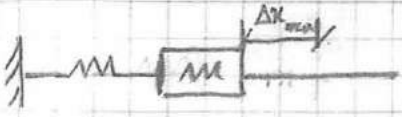
$$U = m' g R \theta^2 [3 + \lambda]$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Leftrightarrow R\left(11 + \frac{8}{3}\lambda\right)\ddot\theta + g(3+\lambda)\theta = 0$$

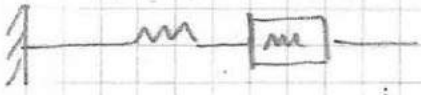
b)



$\begin{cases} v = 0 \\ \Delta x = 0 \end{cases}$

① 

$\begin{cases} v = 0 \\ \Delta x = \Delta x_{max} \end{cases}$

② 

$\begin{cases} v = v_{max} \\ \Delta x = 0 \end{cases}$

$T + U = cte$

$0 + U_1 = T_2 + 0$

$\boxed{U_{max} = T_{max}}$

$\theta(t) = \theta \cos(\omega_n t - \phi)$

$\dot{\theta}(t) = -\theta \omega_n \underbrace{\text{sen}(\omega_n t - \phi)}_{(\pm 1)}$

$\dot{\theta}_{max} = -\theta \omega_n$

$(\dot{\theta}_{max})^2 = \theta^2 \omega_n^2$

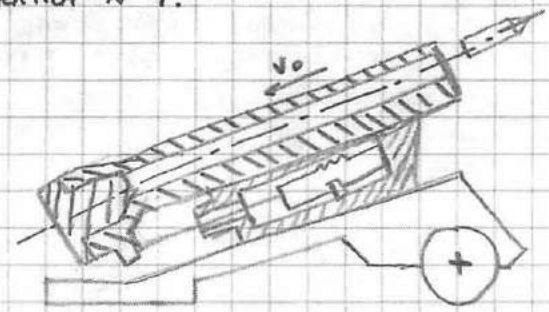
$$\begin{cases} T_{max} = m' R^2 \omega_n^2 \theta^2 \left(1 + \frac{8}{3}\lambda\right) \\ U_{max} = m' g R \theta^2 (3 + \lambda) \end{cases} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{3+\lambda}{1+\frac{8}{3}\lambda}}$$

AULA PRÁTICA Nº 4.

18.10.96

VIBRAÇÕES (P)

1.



CORREDIÇA → m

SIST. CRITICAMENTE AMORTECIDO

$\xi = 1 \; ; C = C_c \; ; \sqrt{\xi^2 - 1} = 0$

a) $C = ?$ AMORTECIMENTO CRÍTICO $\Rightarrow \xi = 1$

$V = V_0$

$$\xi = \frac{c}{c_c} \Leftrightarrow 1 = \frac{c}{c_c} \Leftrightarrow C = C_c$$

$$C_c = 2\sqrt{Km} \Leftrightarrow C_c = 2\sqrt{10000 \times 500} \Leftrightarrow C_c = 4472.1 \; Ns/m$$

$$c = 4472.1 \; Ns/m$$

b) $V_0 = ?$

$x(t) =$ deslocamento máximo $= 0.3 \Rightarrow \ddot{x}(t) = 0$

PAG. 1.9

$$\dot{x}(t) = e^{-\omega_n t}\left[(V_0 + \omega_n \cancel{x(0)}^{0})(1 - t\omega_n) - \cancel{x_0}^{0}\omega_n\right]$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}(t) = 0 \end{cases} \qquad 0 = \underset{\neq 0}{e^{-\omega_n t}} \; \underset{\neq 0}{V_0}(1 - t\omega_n) \Rightarrow 1 - t\omega_n = 0 \Leftrightarrow$$

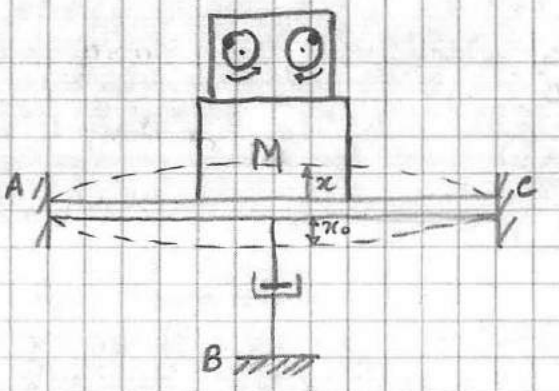
$$\Leftrightarrow t\omega_n = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\omega_n} \wedge \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10000}{500}}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0.224 \; s$$

$$x(t) = [\underset{\to 0}{x_0} + (V_0 + \omega_n \underset{\to 0}{x_0})t]\, e^{-\omega_n t}$$

$$0.3 = V_0 \, e^{-\sqrt{20} \times 0.224} \Leftrightarrow V_0 = 3.65 \; m/s$$

2.



$P = 2780 = (M+2m)g$

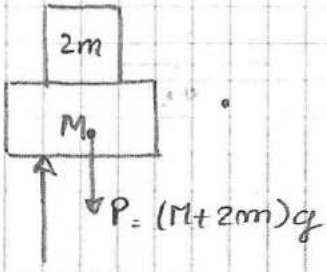
$\omega = c^{te} = 900 rpm = 94.25 rad/s$

$A_{max} = 0.0216 m$

$m'R = 0.046 Kgm$

a) Eq. diferencial do movimento

DIAGRAMA CORPO LIVRE ESTÁTICO:



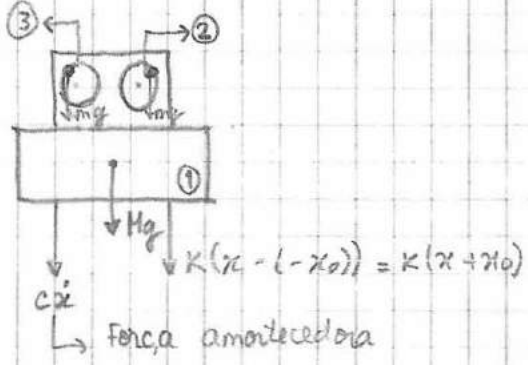
NOTA: A barra funciona como a tensão nula

$\Downarrow$

$F = Kx$

$$\Sigma F_i = 0 \Rightarrow (M+2m)g = -Kx_0 \Leftrightarrow \boxed{(M+2m)g + Kx_0 = 0} \quad *_1$$

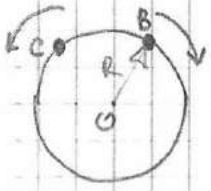
DIAG. ED. DINÂMICO:



$$\Sigma F_e = \dot{\vec{Q}} \wedge \vec{Q} = m\ddot{x}$$

$$-(M+2m)g - K(x+x_0) - c\dot{x} = \dot{\vec{Q}}_1 + \dot{\vec{Q}}_2 + \dot{\vec{Q}}_3$$

$$\vec{Q}_1 = M\ddot{x} = M \begin{vmatrix} 0 \\ \ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$



$$\vec{Q}_2 = m\vec{a}_B = m\left[\vec{a}_0 + \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{OB}}_{\to 0} - \omega^2 \vec{OB}\right] = m\left(\begin{vmatrix} 0 \\ \ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{vmatrix} r\cos\alpha \\ r\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{Q}_2 = m \begin{vmatrix} -\omega^2 R\cos\alpha \\ \ddot{x} - \omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{Q}_3 = m\vec{a}_c = m\left(\vec{a}_0 - \omega^2 \vec{OC}\right) = m\left(\begin{vmatrix} 0 \\ \ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{vmatrix} -r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{Q}_3 = m \begin{vmatrix} +\omega^2 r\cos\alpha \\ \ddot{x} - \omega^2 r\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 = M \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{x} \\ 0 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} -\omega^2 r\cos\alpha \\ \dot{x} - \omega^2 r\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} \omega^2 r\cos\alpha \\ \dot{x} - \omega^2 r\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vec{Q}} = \begin{vmatrix} 0 \\ M\ddot{x} + 2m(\dot{x} - \omega^2 r\sin\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}$$

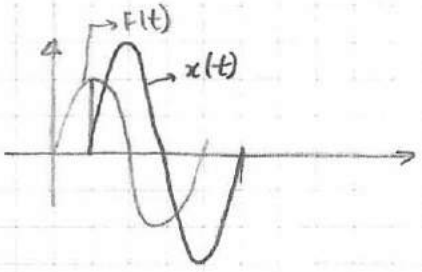
$$\sum \vec{Fe} = \dot{\vec{Q}} \Leftrightarrow -(M+2m)g - K(x+x_0) - c\dot{x} = \dot{\vec{Q}} \Leftrightarrow \underbrace{(M+2m)g - Kx_0}_{*1} - Kx - c\dot{x} = \dot{\vec{Q}}$$

$$\Leftrightarrow 0 - Kx - c\dot{x} = M\ddot{x} + 2m(\dot{x} - \omega^2 r\sin\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M\ddot{x} + 2m\dot{x} + c\dot{x} + Kx = 2m\omega^2 r\sin\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (M+2m)\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 2m\omega^2 R\sin\alpha$$

b) $\omega_m = ?$ $\xi = ?$



PAG. 2.11 Para $\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\omega}{\omega_m} = 1 \Rightarrow \omega = \omega_m = 94.25$ rad/s

ou

$$\phi = \text{arc tg}\ \frac{c\omega}{K - M\omega^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \text{arc tg}\ \frac{c\omega}{K - M\omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\ \frac{c\omega}{K - M\omega^2} = \infty \Rightarrow K - M\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \Rightarrow \omega = \omega_m$$

$K = M\omega^2$

$$X(\omega) = \frac{F}{K\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad \wedge \beta = 1 \quad \wedge F = 2m\omega^2 R \wedge X(\omega) = 0.0216$$

δ

$$0.0216 = \frac{2mR\omega^2}{K\sqrt{(2\xi\beta)^2}} \Rightarrow 0.0216 = \frac{2\times 0.046\times 94.25^2}{\frac{1720}{9.8}\times 94.25^2\times 2\xi\times 1} \Rightarrow$$

$mR = 0.046$

$K = M\omega^2 = \frac{1720}{9.8}\times 94.25^2 = 161453 \ N.m$

$\Rightarrow \xi = \frac{0.046}{3.923} \Rightarrow \xi = 1.17\times 10^{-2}$

c) $X(\omega) = ?$ $\phi = ?$ para $\omega = 1200$ rpm $= 125.66$ rad/s

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \beta = \frac{125.66}{94.25} = 1.33$$

$$X(\omega) = \frac{F}{K\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = \frac{2mR\omega^2}{K\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = 0.00116 \ m$$

$\xi = ?$

$$\phi = \text{arc tg}\ \frac{c\omega}{K - M\omega^2} \quad \text{ou} \quad \phi = \text{arc tg}\ \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)} = 3.1 \ rad = 177.691°$$

d) $F_B = ?$ $\omega = 1200$ rpm $F_B = c\dot{x}$

$$\xi = \frac{c}{c_R} \Rightarrow c = \xi \times c_R \qquad c_R = 2\sqrt{KM} = 2\sqrt{M\omega^2 \times M} =$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{1720}{9.8}\right)^2 \times 125.66^2} = 45647.9$$

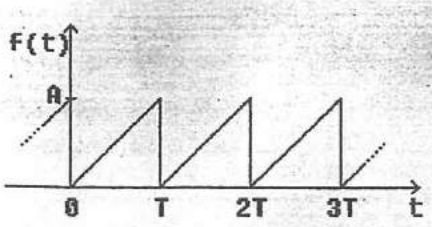
$x = X(\omega)\cos(\omega t - \phi)$

$\dot{x} = -X(\omega)\,\omega \sin(\omega t - \phi) = -0.00116 \times 125.66 \times \underbrace{\sin(125.66\,t - 3.1)}_{(+1)}$

$= -0.1457 \ m/s$

$F = c\dot{x} = c \times (-0.1457) = -58.691 \ N$

$\dot{x}$

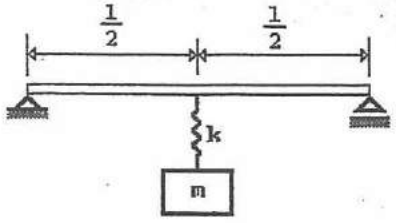


1) Na figura ao lado representa-se uma função periódica f(t) da variável tempo (t).

a) Determinar os coeficientes da série de Fourier e escrever a respectiva expansão.

b) Esboçar graficamente a aproximação com os 3 primeiros termos.

c) Esboçar o espectro de frequências da função dada.



2) O sistema representado na figura é constituído por:

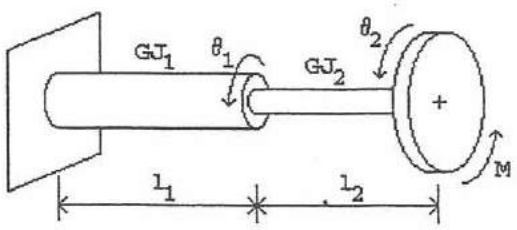
- uma viga de comprimento l, de secção EI e simplesmente apoiada nas suas extremidades;
- um bloco de massa m ligado à viga por uma mola de rigidez K.

Sabendo que a deflexão no ponto médio da viga é dada pela expressão $\delta=\frac{Pl^3}{48EI}$ e considerando a massa da viga desprezável (face à massa m), determinar:

a) a constante de mola equivalente do sistema;

b) o valor da constante de mola equivalente para as características seguintes:

l= 2 m K= 1000 Nm^{-1} EI= 500 Nm^2



Trabalho Prático

3) O sistema representado na figura é constituído por :

- um veio, composto por dois segmentos com comprimentos e secções rectas diferentes, encastrado na extremidade A;
- um disco, de rigidez torsional infinita, montado na extremidade B do veio e submetido a um momento torsor M.

Considerando que o veio se comporta como uma mola de torção linear, determinar:

a) o deslocamento angular do veio em qualquer ponto em função do momento torsor M;

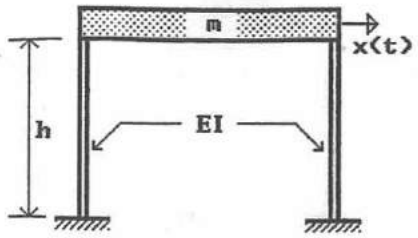
b) a constante de mola equivalente;

c) o valor da constante de mola equivalente para os seguintes valores:

GJ_1= 28000 Nm^2 GJ_2= 14000 Nm^2

l_1= 4 m l_2= 3 m M= 115 Nm

VIBRAÇÕES MECÂNICAS 04.10.96 **Aula prática nº 2 - 1996/97**



1) Na figura ao lado representa-se um pórtico plano constituído por :

- uma plataforma rígida de massa m;
- duas colunas flexíveis de secção recta **EI** e de massa desprezável.

Supondo que a plataforma rígida apenas translada horizontalmente, determinar:

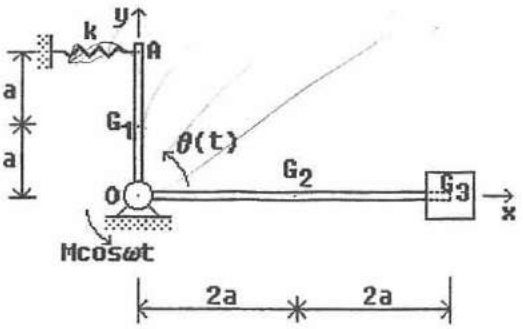
a) a constante de rigidez k das colunas para as seguintes condições:

i) ligação rígida à plataforma;

ii) ligação à plataforma por rótulas;

b) a equação do movimento lateral do pórtico;

c) a frequência natural de vibração da estrutura para as duas condições da alínea a) e para uma secção recta das colunas em perfil INP8 com **EI**= 163380 Nm^2,**h**=3 m e **m**= 1000 kg.



corpo	massa m	momento de inércia I_{ZGi}
1	m_1	I_1
2	m_2	I_2
3	m_3	I_3

2) O sistema mecânico representado na figura é constituído por :

- um braço , corpo 1, que roda em torno do ponto O, e sobre o qual actua a mola de rigidez k;
- um segundo braço, corpo 2, rigidamente ligado ao corpo 1 no ponto O, que roda em torno desse mesmo ponto;
- uma massa, corpo 3, rigidamente ligada ao corpo 2.

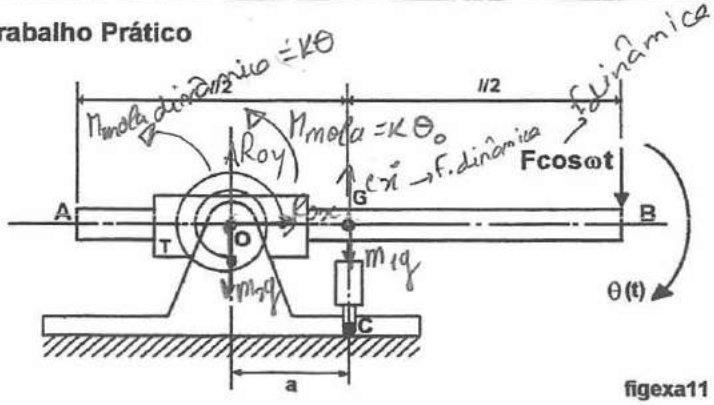
Quando o sistema se encontra na sua posição de equilíbrio estático, a direcção OG_2 coincide com o eixo **xx** (horizontal). No ponto O está aplicado um momento $M(t)= M\cos\omega t\ \vec{k}$. Determinar:

a) a equação do movimento para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio estático;

b) a frequência natural angular ω_n do sistema;

c) o amortecimento crítico c_c do sistema.

Trabalho Prático



figexa11

O sistema representado na figura é constituído por:

- uma barra AB de comprimento l e massa m que pode deslizar no interior de um colar que roda em torno de um eixo que passa pelo ponto O, e relativamente ao qual possui um momento de inércia I_O^C;
- uma mola de torção de rigidez k_t;
- um amortecedor de tipo viscoso e de constante c.

Para a configuração representada na figura, escrever a equação do movimento do sistema para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio estático.

Eq. estático:

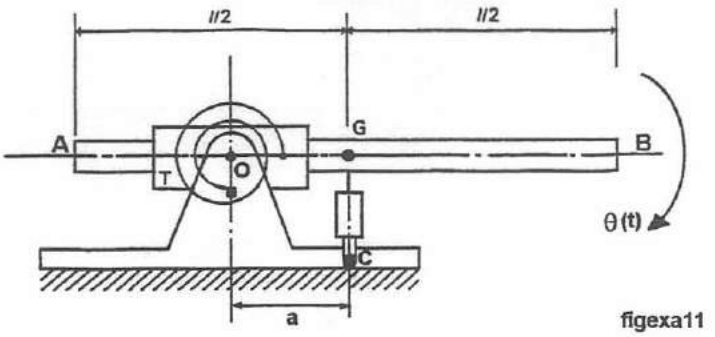
$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow m_1 g\, a = K\theta_0$? $\Sigma \vec{M}_O = K\vec{C}$?

R:

$J_O \ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + k_t\theta = F\cos\omega t\,\frac{l}{2} + a$

VIBRAÇÕES MECÂNICAS 11.10.96 **Aula prática nº 3 - 1996/97**

1) O sistema representado na figura é constituído por:



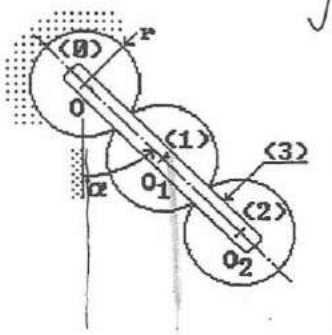
figexa11

- uma barra AB de comprimento l=0.5 m e massa m=1.25 kg que pode deslizar no interior de um colar que roda em torno de um eixo que passa pelo ponto O, e relativamente ao qual possui um momento de inércia I_O^C;
- uma mola de torção de rigidez k_t=2 Nm/rad;
- um amortecedor de tipo viscoso e de constante c.

Para a configuração representada na figura, a distância a é igual a 0.12 m e a vibração livre amortecida apresenta um período T=1.3 s e fornece as seguintes leituras para os deslocamentos angulares máximos em torno da posição de equilíbrio estático : 28.90°, -20.16°, 14.07°, -9.82°, 6.85°.

Determinar:

a) a razão de amortecimento ξ;
b) a frequência natural não amortecida ω_n;
c) o momento de inércia do colar I_O^C em relação a um eixo que passa pelo ponto O;
d) o valor da constante c do amortecedor;
e) a expressão da resposta natural do sistema a uma perturbação inicial $\theta_0 = 0.25$ rad e $\dot{\theta}_0 = 5$ rad/s. Esboçar a resposta θ(t) e a respectiva envelope de 0 até 5 s.
f) Determinar o instante em que o sistema passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio estático.
g) Determinar o instante em que o sistema atinge o deslocamento máximo.



2) A figura representa um mecanismo composto por :
- uma roda dentada (0) fixa e duas (1) e (2) móveis. Cada uma das rodas possui massa m' e raio r;
- uma manivela de massa m" e de comprimento l.

Utilizando o princípio da conservação de energia, determinar:

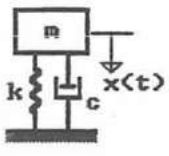
a) a equação de movimento do sistema;
b) a frequência natural das pequenas oscilações do sistema.

Nota: exprimir o resultado em função do parâmetro $\lambda = \frac{m''}{m'}$.

Aplicação numérica :

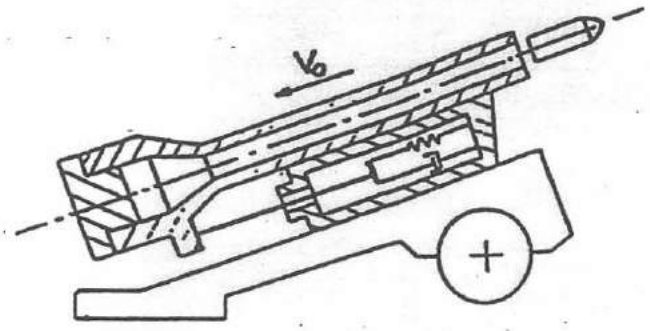
m'=20 g m"=10 g r=10 mm l=4r

Trabalho Prático



3) O sistema mecânico representado na figura é constituído por uma massa de peso P=24.5 N, uma mola de rigidez k=1800 Nm^{-1} e está amortecido viscosamente de tal modo que a razão entre duas amplitudes consecutivas quaisquer é de 1.00 para 0.98. Determinar:

a) o decremento logarítmico δ;
b) a razão ξ e o coeficiente c de amortecimento;
c) a equação de movimento do sistema;
d) a frequência angular e linear amortecidas e o respectivo período;
e) a resposta do sistema para um deslocamento inicial x_0=5.0E-03 m e uma velocidade inicial v_0= 26.4E-03ms^{-1}. Esboçar o respectivo gráfico.



1) A figura representa esquematicamente um canhão cuja corrediça de massa **m** é travada por um dispositivo com propriedades de rigidez **k** e de amortecimento **c**. Conhecendo a constante de mola **k**, determinar:

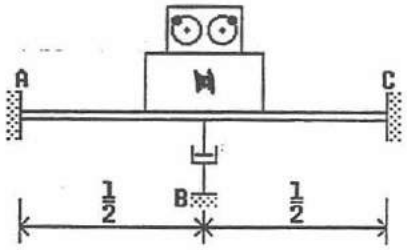
a) a constante **c** de modo que o amortecimento seja crítico;

b) a velocidade inicial v_0 para um deslocamento máximo de recuo igual a 0.3 m.

Aplicação numérica :

m= 500 kg **k**=10000 Nm^{-1}

2) Um excitador mecânico de vibrações, de massas excêntricas com rotações contrárias, de peso igual a 1780 N, é utilizado para determinar as características de uma estrutura (viga) cuja massa se considera desprezável. À velocidade de 900 rpm, um estroboscópio indica que quando as massas excêntricas do excitador se encontram no topo, a estrutura está a mover-se para cima passando nesse instante pela posição de equilíbrio.



A amplitude máxima do movimento da estrutura, medida a meio vão, é de 0.0216 m. Para um desequilíbrio (mr) do excitador igual a 0.046 kgm, determinar:

a) a equação diferencial do movimento do sistema;

b) a frequência natural e o factor de amortecimento da estrutura;

c) a amplitude máxima e o desfasamento para ω=1200 rpm;

d) a força transmitida ao apoio B para ω=1200 rpm.

Trabalho Prático

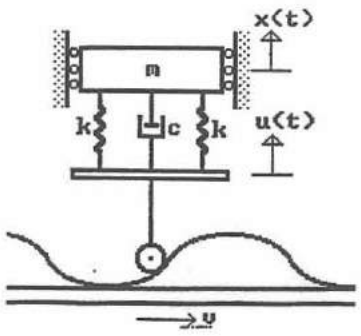
3) Um sistema a um grau de liberdade possui como características: m=1.5 kg, k=3.79E3 N/m e c=3.016 kg/s.

Uma força de tipo harmónico f(t)=25 cosωt provoca um deslocamento da massa de amplitude X=1.168E-2 m. Calcular o(s) valor(es) da frequência de excitação.

REGIME FORÇADO HARMÓNICO

VIBRAÇÕES MECÂNICAS **Aula prática nº 5 - 1996/97**

25.10.96



1) O sistema representado na figura permite ensaiar conjuntos massa-mola-amortecedor de veículos, sendo a estrada simulada por um tapete rolante de superfície ondulada e directriz sinusoidal. Admitindo que a massa m apenas se desloca verticalmente, desprezando a inércia do rodízio e supondo que o comprimento de onda da superfície é λ e a sua amplitude é U, determinar:

a) a equação diferencial do movimento;

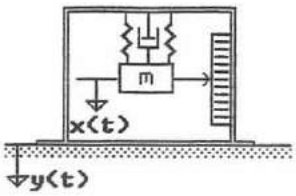
b) a transmissibilidade TR dos movimentos absoluto e relativo;

c) a(s) velocidade(s) do tapete para a qual o sistema entra em ressonância de amplitude e ressonância de fase;

d) a amplitude máxima do deslocamento da massa.

Aplicação numérica:

m=1 kg	c=30 Ns/m	k=350 N/m
U=0.05 m	λ=0.5 m	v=1.6 m/s



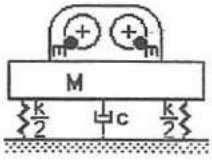
2) Um transdutor de vibrações, com uma frequência natural de 8 rad/s e com uma razão de amortecimento igual a 0.2, está montado sobre um componente de uma máquina sujeito a um movimento harmónico. Para uma frequência de excitação igual a 40 rad/s, mede-se numa régua uma diferença de 8 mm entre os valores máximo e mínimo do transdutor. Determinar:

a) a amplitude do movimento do componente mecânico;

b) o erro cometido ao considerar a amplitude do movimento y(t) como sendo a amplitude medida na régua.

c) Como proceder para atenuar o erro da alínea anterior? Justificar.

Trabalho Prático



3) Um compressor de massa igual a 450 kg funcionando a uma velocidade de rotação constante e igual a 1750 rpm está montado sobre uma suspensão elástica. As massas excêntricas do compressor valem 10 kg e apresentam uma excentricidade de 100 mm. A razão de amortecimento da montagem é de 0.15. Determinar:

a) a rigidez da suspensão de modo que sòmente 20% da solicitação seja transmitida à fundação;

b) a amplitude da força transmitida.

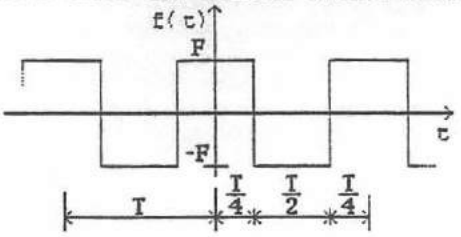
c) Representar a equação do movimento pelo diagrama de vectores.

d) Representar sobre o diagrama da alínea anterior o vector representativo da força transmitida.

TR. ACTIVA. (2.22)

VIBRAÇÕES MECÂNICAS (03/11/96) **Aula prática nº 6 - 1996/97**

1) A força exterior periódica f(t) representada na figura actua sobre um sistema massa-mola-amortecedor (oscilador elementar) em regime permanente.



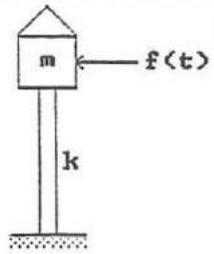
a) Calcular o espectro da função de excitação f(t) e da resposta x(t) do sistema.

b) Representar graficamente para os primeiros nove harmónicos as razões $\frac{F_p}{F}$ e $\frac{X_p}{X_s}$ nos dois casos seguintes:

i) $\omega_n = 0.8\,\omega$ $\xi = 0.05$

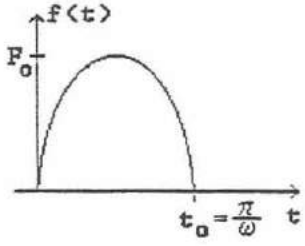
ii) $\omega_n = 5.3\,\omega$ $\xi = 0.05$

Comentar o resultado.



2) O depósito de água representado na figura tem um peso P e está suportado por um pilar de rigidez à flexão k para solicitações horizontais aplicadas no topo. Desprezando o amortecimento do sistema determinar a resposta x(t) à solicitação f(t) representada na figura abaixo para :

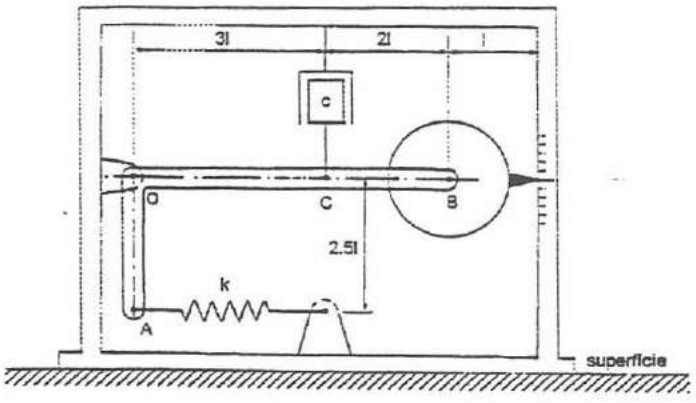
a) $0 \le t \le t_0 = \frac{\pi}{\omega}$ s; b) $t > t_0 = \frac{\pi}{\omega}$ s.



$$f(t) = \begin{cases} F_0 \sin\omega t \text{ para } 0 \le t \le t_0 \\ 0 \text{ para } t_0 < t \end{cases}$$

Nota: $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

Trabalho Prático



A figura representa um instrumento de medição das pequenas amplitudes do deslocamento de vibração de uma superfície. O transdutor é constituído por:

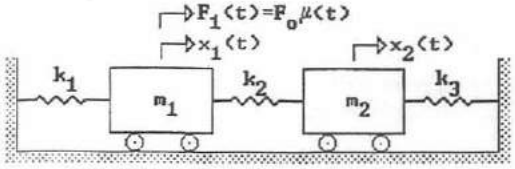
- um braço de ligação AOB, em forma de "L" e de massa desprezável, que roda em torno do ponto O;
- uma massa de 0.5 Kg ligada ao braço no ponto B;
- um dissipador de constante de amortecimento c, ligada ao braço no ponto C;
- uma mola de constante de rigidez k, ligada ao braço no ponto A;
- um ponteiro, que se move sobre uma escala não calibrada, marcada na caixa de suporte.

O instrumento ainda não está calibrado de modo a medir-se directamente a amplitude do deslocamento da sua base.

A frequência natural não amortecida do aparelho é de 2.5 Hz e a razão entre duas amplitudes consecutivas em regime livre é de 111. Determinar:

a) a equação de movimento da massa concentrada em B;
b) a constante de rigidez da mola;
c) a razão de amortecimento;
d) a frequência angular natural amortecida;
e) a constante de amortecimento;
f) a amplitude do deslocamento de vibração da superfície, quando a sua frequência de vibração é de 2 Hz, sabendo que o ponteiro indica um deslocamento de 0.5 mm.
g) o erro cometido se se tomasse o valor lido como o verdadeiro deslocamento da superfície (Nota: o instrumento ainda não está calibrado).

VIBRAÇÕES MECÂNICAS 15/11/96 **Aula prática nº 7 - 1996/97**



$k_1=k_2=k$; $k_3=3k$

$m_1=3m$; $m_2=m$

1) Na figura esquematiza-se um sistema não amortecido com dois graus de liberdade. A posição das massas m_1 e m_2 é referenciada pelas coordenadas lineares $x_1(t)$ e $x_2(t)$ relativas à posição de equilíbrio estático. Determinar:

a) as equações diferenciais do movimento;

b) as matrizes de massa e de rigidez e os vectores de deslocamentos e acelerações;

c) as frequências naturais de vibração;

d) as formas naturais de vibração. Fazer um esboço gráfico destas e comentar o resultado;

e) a resposta natural do sistema para as condições iniciais: $x_1(t=0)=x_{10}=0$;

$\dot{x}_1(t=0)=\dot{x}_{10}=0$; $x_2(t=0)=x_{20}$; $\dot{x}_2(t=0)=\dot{x}_{20}=0$.

f) Normalizar os vectores modais de modo que as massas modais sejam unitárias;

g) Verificar as propriedades de ortogonalidade das formas naturais relativamente às matrizes de massa e de rigidez;

h) Exprimir as equações do movimento do sistema na base modal;

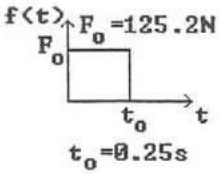
i) Determinar a resposta do sistema à excitação $\{f(t)\}=\{F_0\mu(t) \quad 0\}^T$ utilizando a técnica da análise modal.

Trabalho Prático

2) Um sistema com um grau de liberdade possui as seguintes características:

m=10 kg k=5360 N/m c=165 Ns/m

Determinar a resposta x(t) do sistema até t= 0.6 s à solicitação representada na figura com x(t=0)=0 e $\dot{x}$(t=0)=0, utilizando o método de integração numérica das diferenças finitas centrais com um passo Δt= 0.025 s. Esboçar e comentar o gráfico da resposta.



1) A análise das pequenas oscilações de torção de um sistema de transmissão pode ser efectuada com base no modelo representado na figura, que é constituído por:

- um veio de rigidez k_1 sobre o qual estão acopladas duas rodas dentadas de inércia J_1 e J_2 respectivamente;
- um veio de rigidez k_2 com uma extremidade encastrada e possuindo na outra uma roda dentada de inércia J_3.

O movimento entra pela roda (1) e transmite-se ao segundo veio pelas rodas (2) e (3) cuja razão de raios $\frac{R_2}{R_3}$ é igual a n.

a) Estabelecer as equações do movimento torsional do sistema;

b) Determinar os modos naturais de vibração;

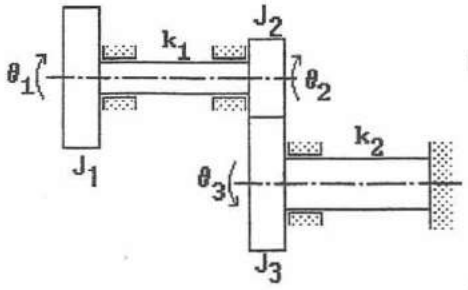
c) Representar graficamente as formas naturais de vibração;

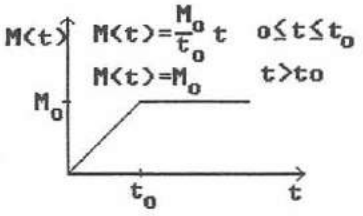
d) Calcular a resposta do sistema durante a fase de arranque, para um momento motor do tipo representado na figura.

Aplicação numérica:

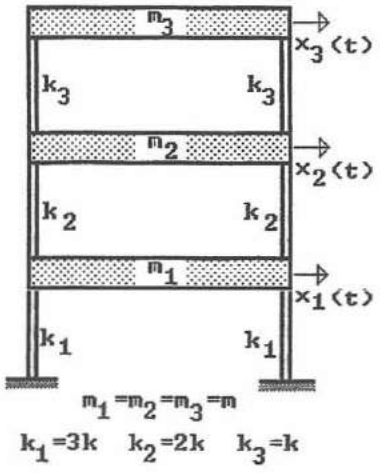
$J_1=0.2\ kgm^2$ $J_2=0.05\ kgm^2$ $J_3=0.1\ kgm^2$

$k_1=k_2=20\ Nm$ $n=4$





Trabalho Prático



2) Na figura ao lado representa-se um pórtico plano constituído por:

- três plataformas rígidas de massa m_1, m_2 e m_3 respectivamente;
- três pares de colunas flexíveis e de massa desprezável.

Determinar:

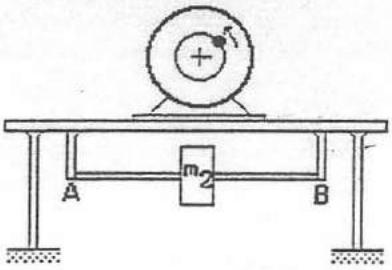
a) as equações do movimento lateral do sistema utilizando o formalismo de Lagrange;

b) uma estimativa da frequência fundamental de vibração utilizando o quociente de Rayleigh;

c) as frequências e formas naturais de vibração;

d) o erro relativo da frequência fundamental estimada em b).

e) Representar graficamente as formas naturais de vibração.



1) A figura representa uma mesa aproveitada para suporte de um equipamento com componentes rotativos e massas desequilibradas. O conjunto mesa e equipamento possui uma massa m=350 kg e o equipamento roda com uma velocidade Ω=400 rpm. Quando em funcionamento, verificou-se que o sistema apresentava um nível vibratório elevado que se transmitia ao solo perturbando o bom funcionamento de outros equipamentos da instalação. Após uma simples medição detectou-se que a velocidade de funcionamento correspondia à frequência de ressonância do sistema na direcção vertical. Para suprimir esta vibração instala-se um redutor de vibrações sintonizado para a frequência de excitação e constituído por uma massa m_2 e por uma barra de secção recta de momento de inércia $I=2.043\times10^{-8}$ m^4, de módulo de elasticidade $E=2.1\times10^{11}$ Pa e comprimento l=1.52 m, conforme se representa na figura.

Determinar a massa m_2 e as frequências naturais do sistema, considerando os apoios A e B como apoios simples.

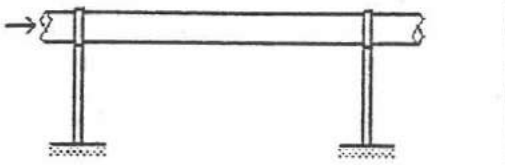


Figura 1

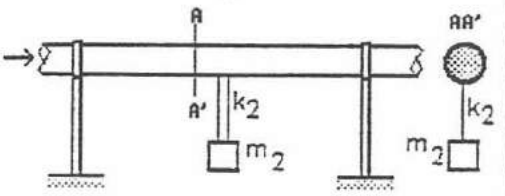


Figura 2

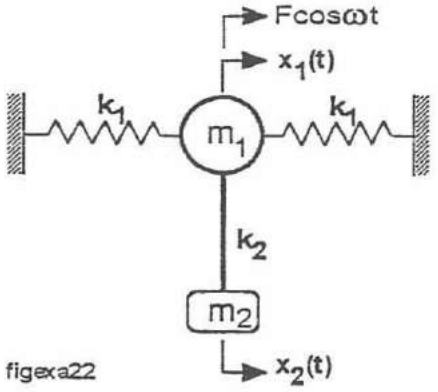


Figura 3

2) Numa instalação de indústria química, uma bomba alimenta uma tubagem comprida como se mostra na figura 1. Quando a velocidade de rotação da bomba é de 356 rpm, as pulsações do fluido enviado para a tubagem coincidem com a frequência natural de vibração lateral da secção da tubagem.

Para resolver o problema fixou-se ao tubo uma massa adicional de 50 Kg através de uma viga encastrada, como se mostra na figura 2. Nestas circunstâncias, o sistema é equivalente ao modelo representado na figura 3. Determinar:

a) A energia cinética do sistema.

b) A energia potencial do sistema.

c) As equações de movimento do sistema na forma matricial.

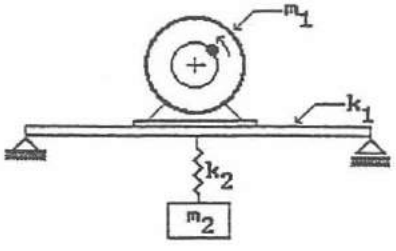
d) A rigidez da viga k_2 e a massa da tubagem m_1 para que as duas frequências naturais do sistema tenham os valores de ω_1=32.38 rad/s e ω_2=42.91 rad/s.

e) Os valores da massa adicional m_2 e da rigidez da viga k_2 para que as duas frequências naturais do sistema sejam mais separadas e tenham os valores de ω_1=26.2 rad/s e ω_2=52.4 rad/s.

f) Justifique o eventual interesse dos valores de ω_1 e ω_2 estarem mais afastados.

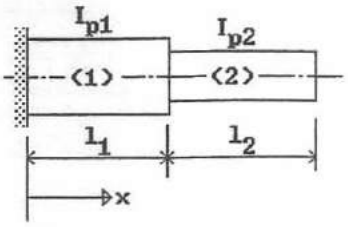
Trabalho Prático

Um motor de massa m_1=300 kg assenta sobre uma suspensão elástica não amortecida (viga simplesmente apoiada). Verifica-se que a velocidade de funcionamento do motor (1500 rpm) corresponde à frequência natural do sistema, provocando uma vibração violenta de elevada amplitude. Para remediar a esta situação, acrescenta-se ao sistema um oscilador auxiliar de características m_2 e k_2 que elimine completamente a vibração do motor.



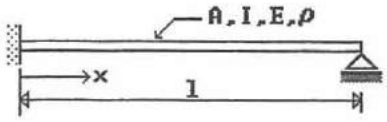
a) Determinar as características m_2 e k_2 de modo a baixar a frequência fundamental do novo sistema a 75% da frequência de excitação.

b) Representar o quociente $\mu=\frac{X_1}{X_s}$ em função da frequência ω, antes e depois da montagem do sistema secundário.



1) O veio representado na figura ao lado, encastrado numa das suas extremidades e livre na outra, é constituído por dois tramos (1) e (2) de comprimentos l_1 e l_2 e secções rectas com momentos polares de inércia I_{p1} e I_{p2} respectivamente. O material de ambos os tramos é o mesmo e possui módulo de elasticidade transversal G e densidade de massa ρ.

a) Estabelecer a equação de frequências naturais de vibração de torção.



2) A figura representa uma viga de comprimento l, de secção recta com área A e momento de inércia I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa específica ρ. A viga apresenta uma extremidade encastrada e a outra simplesmente apoiada.

a) Estabelecer as condições de fronteira.

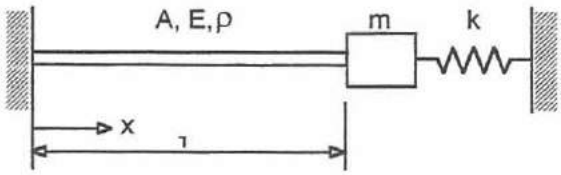
b) Estabelecer a equação de frequências.

c) Determinar as duas primeiras frequências naturais de vibração.

d) Estabelecer a expressão das formas naturais de vibração.

e) Esboçar as duas primeiras formas naturais de vibração.

Trabalho Prático



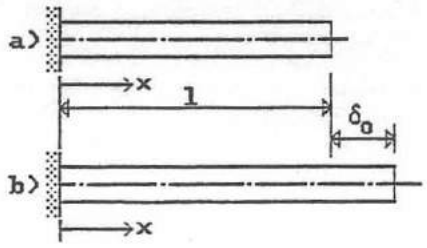
Uma barra de comprimento l, de secção recta de área A, e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, apresenta uma extremidade fixa e na outra extremidade está ligada a uma massa rígida m e a uma mola de rigidez k, conforme se representa na figura. Para a vibração longitudinal da barra,

a) Estabelecer a equação do movimento e respectivas condições de fronteira.

b) Escrever a equação característica ou de frequências.

c) Indicar os intervalos que contêm as três primeiras frequências naturais.

d) Esboçar, justificando, as três primeiras formas naturais de vibração.



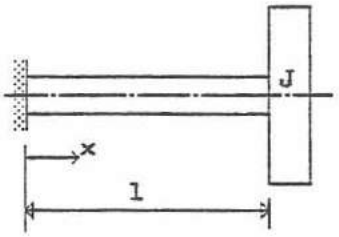
1) Na figura a) representa-se uma barra de secção recta uniforme e de área A, de comprimento l e de material com densidade ρ e módulo de elasticidade E. A barra está fixa numa extremidade e livre na outra. A figura b) representa a barra descrita à qual é imposto um deslocamento δ_0 na extremidade livre.

a) Determinar as frequências naturais de vibração longitudinal da barra.

b) Representar as três primeiras formas naturais de vibração e indicar os respectivos nodos.

c) Estabelecer a equação geral da vibração longitudinal livre.

d) Estabelecer a equação do movimento axial da barra provocado pela aplicação do deslocamento δ_0 (vibração longitudinal livre).



2) O sistema representado na figura é constituído por um veio de secção recta circular e uniforme com momento polar de de 2ª ordem I_p, de densidade ρ, de módulo de elasticidade transversal G e de comprimento l. O veio está encastrado numa das extremidades possuindo na outra um volante de momento de inércia axial (xx) J.

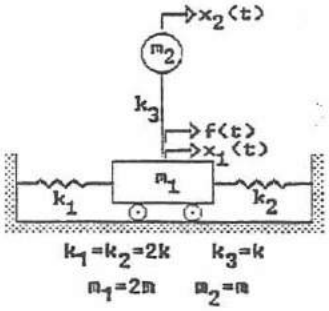
a) Estabelecer a equação de frequências de torção.

b) Determinar as duas primeiras frequências naturais de vibração para uma razão $\beta = \frac{J_V}{J} = 1$,

onde $J_V=\rho I_p l$.

c) Discutir o resultado para os valores limites do parâmetro β (0 e ∞).

Trabalho Prático



O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera respectivamente.

a) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

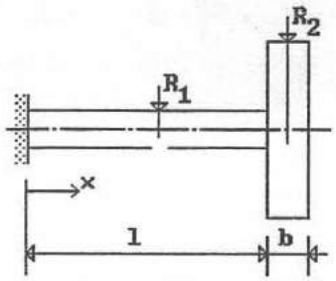
c) Esboçar e comentar as formas naturais de vibração.

d) Normalizar os vectores modais de modo que as massas modais sejam unitárias.

e) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.

f) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ da resposta da massa m_1 quando $f(t)=F\cos\omega t$ com $\omega=14.14$ rad/s , $k=200$ N/m e $m=2$ kg.

g) Redimensionar a rigidez k_3 da barra de modo que a amplitude $X_1(\omega)$ da massa m_1 seja nula.



1) O sistema representado na figura é constituído por um veio de secção recta circular e uniforme de raio R_1, de densidade ρ, de módulo de elasticidade transversal G e de comprimento l. O veio está encastrado numa das extremidades possuindo na outra um volante de raio R_2, de densidade ρ e de espessura b.
Pelo **método da energia de Rayleigh,** e admitindo para a forma fundamental uma deformada $\theta(x)$ linear, estimar a frequência fundamental de vibração de torção nos dois casos seguintes:

a) considerando a massa do veio (ω_a);

b) desprezando a massa do veio (ω_b).

c) Calcular a frequência fundamental ω_1 exacta.

d) Comparar os resultados e calcular o erro relativo para os valores estimados em a) e b).

Aplicação numérica:

R_1=5 mm R_2=10 mm l=40 mm b=5 mm

$\rho=7.8*10^3$ kg/m^3 G=0.82 Mbar

2) A figura abaixo representa um veio simplesmente apoiado constituído por três tramos AB, BC e CD, de comprimentos l_1,l_2 e l_3, e de secções rectas circulares com diâmetros D_1,D_2 e D_3 respectivamente. O material do veio possui uma densidade de massa ρ e módulo de elasticidade E. Pelo **método da energia de Rayleigh**, estimar a frequência fundamental de vibração lateral do veio (vibração de flexão).

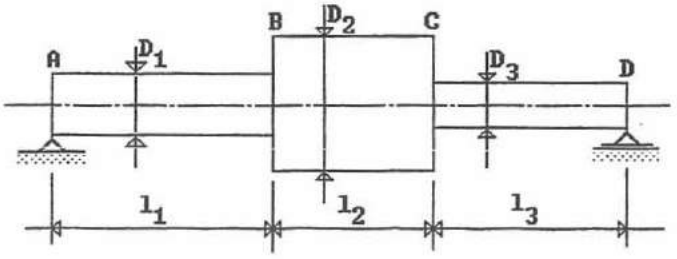
Sugestão: admitir uma ~~deformada~~ deslocamento horizontal para o tramo BC e deformadas sinusoidais para os tramos AB e CD.

Aplicação numérica:

l_1=1 m l_2=0.5 m l_3=0.8 m

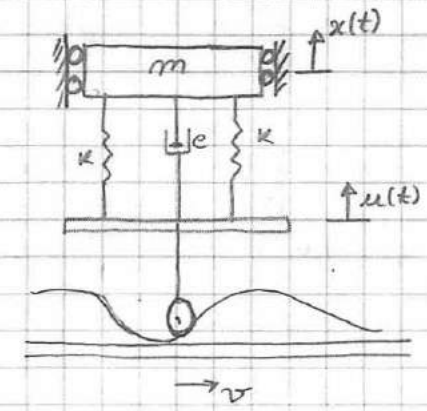
D_1=0.15 m D_2=0.4 m D_3=0.12 m

$\rho=7.8*10^3$ kg/m^3 $E=2.1*10^{11}$ N/m^2



AULA PRÁTICA nº 5

VIBRAÇÕES
25.10.96



$m = 1\,kg$
$U = 0.05\,m$
$c = 30\,Ns/m$
$\lambda = 0.5\,m$
$K = 350\,N/m$
$v = 1.6\,m/s$

TRANSMISSÃO ~~PASSIVA~~

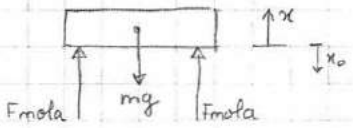
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad ; \quad \frac{c}{K} = \frac{2\xi}{\omega_n} \quad ; \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

a)

EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DO MOV. HARMÓNICO

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F\cos(\omega t + \alpha)$$

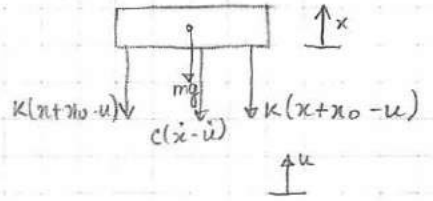
Equilíbrio estático:



$F_{mola} = -Kx_0$

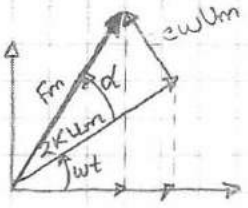
$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow mg = -2Kx_0$

Equilíbrio dinâmico:



$$\Sigma \vec{F}_e = \vec{Q} \Leftrightarrow \Sigma \vec{F}_e = m\ddot{x} \Leftrightarrow -2K(x+x_0-u) - mg - c(\dot{x}-\dot{u}) = m\ddot{x}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + 2K(x+x_0-u) + c(\dot{x}-\dot{u}) + 2Kx_0 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + \cancel{2Kx_0} + 2Kx - 2Ku + c\dot{x} - c\dot{u} - \cancel{2Kx_0} = 0$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + 2Kx = \underbrace{2Ku + c\dot{u}}_{F_m(\cos\omega t + \alpha)}$$



$$\begin{cases} u = U_m \cos\omega t \\ \dot{u} = -\omega U_m \operatorname{sen}\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2Ku = 2KU_m\cos\omega t \\ c\dot{u} = -c\omega U_m \operatorname{sen}\omega t \end{cases}$$

Pelo Teorema de Pitágoras: $F_m^2 = (c\omega U_m)^2 + (2KU_m)^2 \Leftrightarrow F_m = \sqrt{(c\omega U_m)^2 + (2KU_m)^2}$

$\omega = ?$

$$\begin{cases} \lambda = vT \\ T = \frac{2\pi}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \lambda = v\frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi\,1.6}{0.5} \Leftrightarrow \boxed{\omega = 20.1\,rad/s}$$

$$F_m = \sqrt{(30\times 20.1\times 0.05)^2 + (2\times 350\times 0.05)^2}$$

$$\boxed{F_m = 46.2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{c\omega U_m}{2K U_m} \Rightarrow \alpha = \arctg \frac{c\omega U_m}{2K U_m} \Leftrightarrow \alpha = \arctg \frac{30 \times 20.1}{2 \times 350} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0.711}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 2Kx = F_m \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\boxed{\ddot{x} + \underbrace{30}_{c}\dot{x} + \underbrace{700}_{K_{eq}}x = 46.2 \cos(20.1\,t + 0.711)}$$

↳ EQ. DIF. MOVIMENTO

b) $$TR = \frac{X(\omega)}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_m} \wedge \omega_m = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{700}{1}} \Leftrightarrow \boxed{\omega_m = 26.45 \text{ rad/s}}$$

$$\beta = \frac{20.1}{26.45} \Leftrightarrow \boxed{\beta = 0.76}$$

$$\xi = \frac{c}{c_c} \wedge c_c = 2\sqrt{K_{eq} \cdot m_{eq}} = 2\sqrt{700 \times 1} = 52.9$$

$$\xi = \frac{30}{52.9} \Leftrightarrow \boxed{\xi = 0.57}$$

$$TR = \frac{\sqrt{1+(2\times 0.57 \times 0.76)^2}}{\sqrt{(1-0.76^2)^2+(2\times 52.9 \times 0.76)^2}} \Leftrightarrow \boxed{TR = 1.37}$$

$$TR_R = \frac{Z(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = \frac{0.76^2}{\sqrt{(1-0.76^2)^2+(2\times 0.57\times 0.76)^2}} \Leftrightarrow \boxed{TR_R = 0.602}$$

c)

$$\beta_{|TR_{max}} = \frac{1}{2\xi}\left[\sqrt{1+8\xi^2} - 1\right]^{1/2} = \frac{1}{2\times 0.57} \times \left[\sqrt{1+8\times 0.57^2} - 1\right]^{1/2} \Leftrightarrow$$

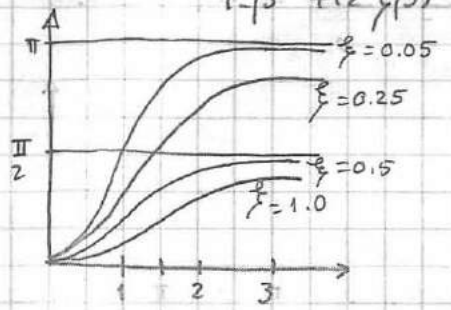
$$\Leftrightarrow \beta_{|TR_{max}} = 0.87 \times 0.947 \Leftrightarrow \beta_{|TR_{max}} = 0.824$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_m} \Leftrightarrow \omega = 0.824 \times 26.45 \Leftrightarrow \omega = 21.8 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \wedge T = \frac{\lambda}{v} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{\lambda}{v}} \Leftrightarrow v = \frac{\lambda}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{0.5}{0.288} \Leftrightarrow \boxed{v = 1.736 \text{ m/s}}$$

↓ ressonância
de amplitude

$$\psi = \text{arc tg}\ \frac{2\xi\beta^3}{1-\beta^2+(2\xi\beta)^2} \Rightarrow \frac{d\psi}{dw} = 0 \Rightarrow w = \sqrt{\frac{3wm^2}{1-4\xi^2}}$$



$$w = \sqrt{\frac{3wm^2}{1-4\xi^2}} \quad \wedge \quad \xi = 0.57\ ;\ wm = 26.45$$

$$w = \sqrt{\frac{3\times 26.45^2}{1-4\times 0.57^2}} \Leftrightarrow w = \sqrt{-5506.4} \rightarrow \text{dá um nº imaginário}$$

A ressonância de fase aumenta com w logo a velocidade também
A velocidade será máxima quando ψ é máximo (ou $\frac{\pi}{2}$)

d)

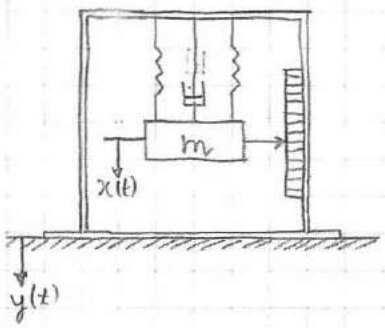
$$\boxed{X_{max} = TR_{max} \times U_{max}}$$

$$TR_{max} = 4\xi^2 \left[\frac{\sqrt{1+8\xi^2}}{2+16\xi^2+(16\xi^4-8\xi^2-2)\sqrt{1+8\xi^2}}\right]^{1/2} = \left[\frac{1.89}{1.677}\times 1.2996\right]^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow TR_{max} = 1.21$$

$$X_{max} = 1.21 \times 0.05 \Leftrightarrow \boxed{X_{max} = 0.0605\ m}$$

2.



$w_n = 8$ rad/s ; $\xi = 0.2$

$w = 40$ rad/s

$Z = \frac{8}{2} = 4$ mm
↳ amplitude do mov. relativo

a) $TR_R = \frac{Z}{Y} \Leftrightarrow Y = \frac{Z}{TR_R} = ?$

$$TR_R = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \Leftrightarrow TR_R = \frac{5^2}{\sqrt{(1-5^2)^2 + (2\times 0{,}2\times 5)^2}} \Leftrightarrow TR_R = 1{,}038$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{40}{8} = 5$$

$$Y = \frac{Z}{TR_R} \Leftrightarrow Y = \frac{4\times 10^{-3}}{1{,}038} \Leftrightarrow \boxed{Y = 3{,}85 \text{ mm}}$$

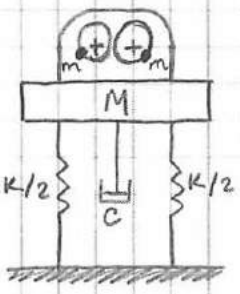
b)

$$\text{Erro} = \left|\frac{Z-Y}{Y}\right| \times 100 = \frac{4-3{,}85}{3{,}85} \times 100 = 3{,}89\ \%$$

c)

Aumentando a massa, o que faria diminuir o ω_n logo o β aumentaria.

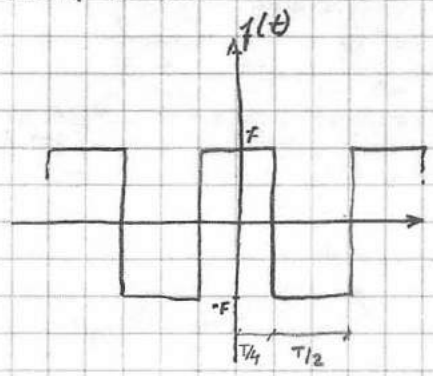
TRABALHO PRÁTICO:



TRANSMISSÃO ACTIVA (2.22)

Aula prática nº6

①



PAG B2.

Séries de Fourier

$$f(t) = F_0 + \sum_{p=1}^{\infty} F_p (pwt - \psi_p)$$

$f(t) = f(-t) \rightarrow$ F. par $\Rightarrow b_n = 0$

$$f(t) = \begin{cases} F & \text{se} \quad 0 < t < T/4 \\ -F & \text{se} \quad T/4 < t < 3/4\,T \\ F & \text{se} \quad 3/4\,T < t < T \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_p = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos pwt\,dt$$

$$b_p = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}\,pwt\,dt$$

$$F_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} = a_p$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/4} F\,dt + \int_{T/4}^{3/4T} -F\,dt + \int_{3/4T}^{T} F\,dt\right] =$$

$$= \frac{2}{T}\left[Ft\Big|_0^{T/4} - Ft\Big|_{T/4}^{3/4T} + Ft\Big|_{3/4T}^{T}\right] = \frac{2}{T}\left[F\frac{T}{4} - F\left(\frac{3}{4}T - \frac{T}{4}\right) + F\left(T - \frac{3}{4}T\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{T}\left[F\frac{T}{4} - F\times\frac{2T}{4} + F\frac{T}{4}\right] = \frac{2}{T}\times 0 = 0$$

$$a_p = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/4} F\cos pwt\,dt + \int_{T/4}^{3/4T} -F\cos pwt\,dt + \int_{3/4T}^{T} F\cos pwt\,dt\right] \qquad w = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{F}{pw}\,\text{sen}\,pwt\Big|_0^{T/4} - \frac{F}{pw}\,\text{sen}\,pwt\Big|_{T/4}^{3/4T} + \frac{F}{pw}\,\text{sen}\,pwt\Big|_{3/4T}^{T}\right] =$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{F}{pw}\,\text{sen}\,pw\frac{T}{4} - \frac{F}{pw}\left(\text{sen}\,pw\frac{3}{4}T - \text{sen}\,pw\frac{T}{4}\right) + \frac{F}{pw}\left(\text{sen}\,pwT - \text{sen}\,\frac{pw}{4}\frac{3}{4}T\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{T}\frac{F}{pw}\left[\text{sen}\,p\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} - \text{sen}\,p\frac{2\pi}{T}\times\frac{3T}{4} + \text{sen}\,p\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} + \text{sen}\,p\frac{2\pi}{T}T - \text{sen}\,p\frac{2\pi}{T}\frac{3}{4}T\right]$$

$$= \frac{2}{T}\times\frac{FT}{p2\pi}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}p - \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}p + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}p + \underbrace{\text{sen}\,2\pi p}_{0} - \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}p\right)$$

$$\frac{2F}{p\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}p - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}p\right) = \frac{2F}{p\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}p - \left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}p\right)\right) = \frac{2F}{p\pi} \times 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}p =$$

$$= \frac{4F}{\pi p}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}p$$

$$\boxed{+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}p = -\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}p}$$

$$F_p = \frac{4F}{\pi p}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}p \begin{cases} F_p = \pm\frac{4F}{\pi p} & \text{se } p \text{ impar} \\ F_p = 0 & \text{se } p \text{ par} \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{p=1}^{\infty} F_p \cos\omega t$$

Resposta do sistema:

$$X(t) = \sum_{p=1}^{\infty} X_p \cos(p\omega t - \phi_p)$$

$$X_p = X_{s_p}\mu_p = \frac{F_p}{k} \times \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_p^2)^2 + (2\xi\beta_p)^2}}$$

$$X_p = \frac{4F}{\pi K_p} \times \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2 p)^2 + (2\xi\beta_p)^2}} \qquad \frac{X_p}{X_s} = \frac{4}{p\pi} \times \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_p^2)^2 + (2\xi\beta_p)^2}}$$

↳ deslocamento estático (X_s)

$$\frac{F_p}{F} = \frac{4}{p\pi}$$

b)

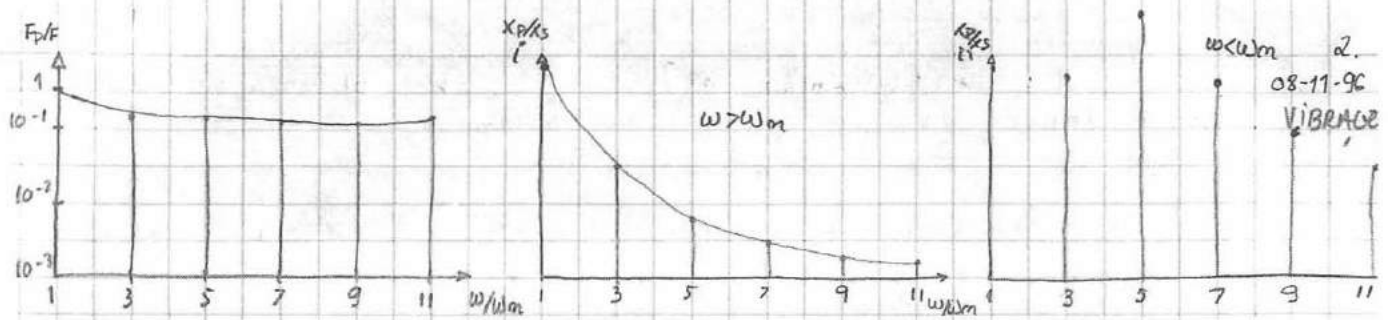
i) $\omega_m = 0{,}8\,\omega$

$$\frac{X_p}{X_s} = \frac{4}{p\pi}\left[(1 - 1{,}5625\,p^2)^2 + 1{,}563\times10^{-2}\,p^2\right]^{-1/2}$$

ii) $\omega_m = 1{,}3\,\omega$

$$\frac{X_p}{X_s} = \frac{4}{p\pi}\left[(1 - 3{,}56\times10^{-7}\,p^2)^2 + 3{,}56\times10^{-4}\,p^2\right]^{-1/2}$$

p	1	3	5	7	9
F_p/F	1.2732	0.4244	0.2546	0.1819	0.1415
X_p/X_s	2.2096	0.0325	0.0067	0.0024	0.0011
X_p/X_s	132	0.6224	1.7572	0.2406	0.0748

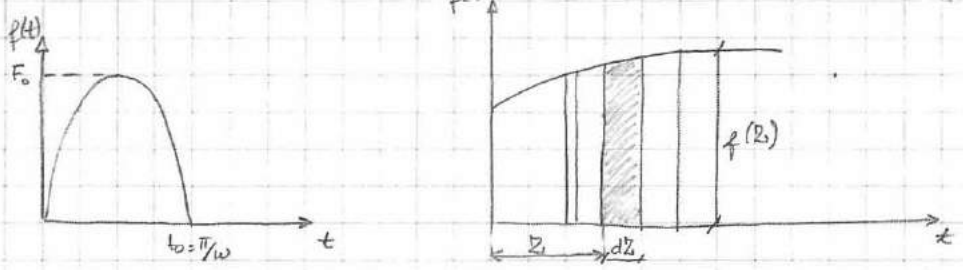


- Existe uma variação ligeira
- Temos como resposta uma harmónica praticamente pura

- Uma variação acentuada
- É uma situação típica de um filtro de passa-baixo

- Vibração irregular, pois a harmónica ① está perto da frequência de amplitude

$\omega_d = \omega_m \sqrt{1-\xi^2} = 5.29\,\omega_0$

② 

Solicitação transciente

$$f(t) = \begin{cases} F_0 \operatorname{sen}\omega t, & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t_0 < t \end{cases}$$

PAG. 4.5 (Integral de Duhamell)

a) $0 \le t \le t_0 = \frac{\pi}{\omega}$ A

$$dx(t) = f(\zeta)\,d\zeta\,h(t-\zeta) \Rightarrow \boxed{x(t) = \int_0^t f(\zeta)\,h(t-\zeta)\,d\zeta} \quad 0 < t < t_0$$

($f(\zeta) \to F_0 \operatorname{sen}\omega\zeta$)

$$\rightarrow h(t-\zeta) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_m(t-\zeta)} \operatorname{sen}\omega_d(t-\zeta)$$

$\left.\begin{matrix}\xi = 0 \\ \omega_d = \omega_m\end{matrix}\right\}$ não há amortecimento $\Rightarrow h(t-\zeta) = \frac{1}{m\omega_m} \operatorname{sen}\omega_m(t-\zeta)$

$$x(t) = \int_0^t F_0 \operatorname{sen}\omega\zeta \times \frac{1}{m\omega_m} \operatorname{sen}\omega_m(t-\zeta)\,d\zeta = \frac{F_0}{m\omega_m}\int_0^t \operatorname{sen}\omega\zeta \times \operatorname{sen}\omega_m(t-\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_m} \times \frac{1}{2}\int_0^t \cos(\omega\zeta - \omega_m t + \omega_m\zeta) - \cos(\omega\zeta + \omega_m t - \omega_m\zeta)\,d\zeta$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_m}\int_0^t \cos[(\omega+\omega_m)\zeta - \omega_m t] - \cos[(\omega-\omega_m)\zeta + \omega_m t]\,d\zeta$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_m}\left[\frac{1}{\omega+\omega_m}\operatorname{sen}\left[(\omega+\omega_m)2 - \omega_m t\right]\Big|_0^t - \frac{1}{\omega-\omega_m}\operatorname{sen}\left[(\omega-\omega_m)2 + \omega_m t\right]\Big|_0^t\right]$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_m}\left[\frac{1}{\omega+\omega_m}\left[\operatorname{sen}\left[(\omega+\omega_m)t - \omega_m t\right] - \operatorname{sen}(-\omega_m t)\right] - \frac{1}{\omega-\omega_m}\left[\operatorname{sen}\left[(\omega-\omega_m)t + \omega_m t\right] - \operatorname{sen}\omega_m t\right]\right]$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_m}\left[\frac{1}{\omega+\omega_m}(\operatorname{sen}(\omega t + \omega_m t - \omega_m t) + \operatorname{sen}\omega_m t) - \frac{1}{\omega-\omega_m}(\operatorname{sen}(\omega t - \omega_m t + \omega_m t) - \operatorname{sen}\omega_m t) =\right.$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_m}\left[\frac{1}{\omega+\omega_m}(\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}\omega_m t) - \frac{1}{\omega-\omega_m}(\operatorname{sen}\omega t - \operatorname{sen}\omega_m t)\right]$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_m}\left[\frac{(\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}\omega_m t)(\omega-\omega_m) - (\operatorname{sen}\omega t - \operatorname{sen}\omega_m t)(\omega+\omega_m)}{(\omega+\omega_m)(\omega-\omega_m)}\right]$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_m}\left[\frac{\omega\operatorname{sen}\omega t - \omega_m\operatorname{sen}\omega t + \omega\operatorname{sen}\omega_m t - \omega_m\operatorname{sen}\omega_m t - \omega\operatorname{sen}\omega t - \omega_m\operatorname{sen}\omega t + \omega\operatorname{sen}\omega_m t + \omega_m\operatorname{sen}\omega_m t}{\omega^2 - \omega_m^2}\right]$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_m}\left[\frac{-2\omega_m\operatorname{sen}\omega t + 2\omega\operatorname{sen}\omega_m t}{\omega^2 - \omega_m^2}\right] = \frac{F_0}{m\omega_m(\omega^2-\omega_m^2)} \cdot (\omega\operatorname{sen}\omega_m t - \omega_m\operatorname{sen}\omega t)$$

Sendo $\beta = \frac{\omega}{\omega_m}$ $\wedge$ $m(\omega_m^2 - \omega^2) = k(1-\beta^2)$

$$= \frac{F_0}{k(1-\beta^2)\omega_m}(\omega_m\operatorname{sen}\omega t - \omega\operatorname{sen}\omega_m t) = \frac{F_0}{k(1-\beta^2)}(\operatorname{sen}\omega t - \beta\operatorname{sen}\omega_m t)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k(1-\beta^2)}(\operatorname{sen}\omega t - \beta\operatorname{sen}\omega_m t) \;//$$

b) $t > t_0 = \frac{\pi}{\omega}$ $\wedge$

$$x(t) = \int_0^{t_0} f(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda$$

Admitindo que quando acaba a solicitação estamos numa solicitação livre

$x(t=t_0) = x_0$
$\dot{x}(t=t_0) = \dot{x}_0$
$\bar{t} = t - t_0$

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\frac{\beta}{\beta^2-1}\left[\operatorname{sen}\omega_n t + \operatorname{sen}\omega_n\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\right] //$$

Aula Prática nº 7. 15/11/96

VIBRAÇÕES



$K_1 = K_2 = K$

$K_3 = 3K$

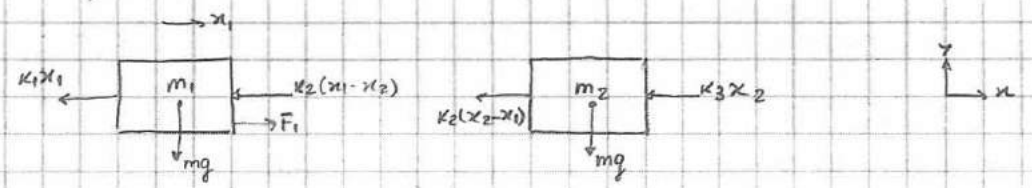
$m_1 = 3m$

$m_2 = m$

SISTEMA NÃO AMORTECIDO COM 2 GRAUS DE LIBERDADE

1.

a) EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOVIMENTO



$$\begin{cases} \sum \vec{F} = m_1 \ddot{x}_1 \\ \sum \vec{F} = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(t) - K_2(x_1 - x_2) - K_1 x_1 = m_1 \ddot{x}_1 \\ -K_2(x_2 - x_1) - K_3 x_2 = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(t) = m_1 \ddot{x}_1 + K_2(x_1 - x_2) + K_1 x_1 \\ -m_2 \ddot{x}_2 - K_2 x_2 + K_2 x_1 - K_3 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_1(t) = m_1 \ddot{x}_1 + (K_1 + K_2) x_1 - K_2 x_2 = F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + x_2(K_3 + K_2) - K_2 x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \ddot{x}_1 + 2K x_1 - K x_2 = F_1(t) \\ m \ddot{x}_2 + 4K x_2 - K x_1 = 0 \end{cases}$$

b) $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 4K \end{bmatrix} \qquad \{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

c) $[[K] - \omega^2 [M]]\{u\} = \{0\}$

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 4K \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 2K - \omega^2 3m & -K \\ -K & 4K - \omega^2 m \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow (2K - \omega^2 3m)(4K - \omega^2 m) - K^2 = 0$$

$$\Rightarrow 8K^2 - 2Km\omega^2 - 12Km\omega^2 + 3m^2\omega^4 - K^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3m^2\omega^4 - 14Km\omega^2 + 7K^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m} \cdot 4.097 \vee \omega^2 = \frac{K}{m} \times 0.57$$

$$\Rightarrow \omega_2 \quad 2.02\sqrt{K/m} \wedge \omega_1 = 0.75\sqrt{K/m}$$

d)

$u \rightarrow$ modos naturais de vibração

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_1} \qquad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_2}$$

$$\left[[K] - \omega^2 [M] \right] \{u\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2K - \omega^2 3m & -K \\ -K & 4K - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2K - 3m\omega^2) u_{11} - K u_2 = 0 \\ -K u_1 + (4K - \omega^2 m) u_2 = 0 \end{cases}$$

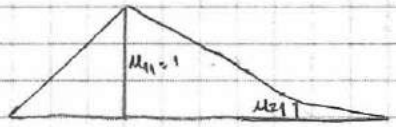
→ Para $\omega = \omega_1 = 0{,}75 \sqrt{K/m}$ e $\boxed{u_{11} = 1}$

$$\left[2K - 3\cancel{m} \times 0.57 \frac{K}{\cancel{m}} \right] \times 1 - K u_{21} = 0 \Leftrightarrow 2 - 1.71 - u_{21} = 0 \Rightarrow \boxed{u_{21} = 0.29}$$

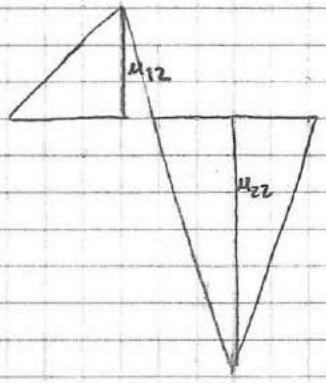
→ Para $\omega = \omega_2 = 2{,}02 \sqrt{K/m}$ e $\boxed{u_{12} = 1}$

$$\left(2K - 3\cancel{m} \times 4.097 \frac{K}{\cancel{m}} \right) 1 - K u_{22} = 0 \Leftrightarrow \boxed{u_{22} = -10.291}$$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.29 \end{Bmatrix} \qquad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -10.291 \end{Bmatrix}$$



MOVIMENTO EM FASE
u_{11} e u_{21} têm sinais =s



MOV^{TO} EM OPOSIÇÃO DE FASE

e) $x_1(t=0) = x_{1D} = 0$

$x_1'(t=0) = x_{1D}' = 0$

$$[u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.29 & -10.291 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)^2$$

15.11.96

$$C_1 = \frac{1}{\det[u]}\left[(u_{22}\cancel{x_{10}}^{0} - u_{12}x_{20})^2 + \frac{(u_{22}\cancel{\dot{x}_{10}}^{0} - u_{12}\cancel{\dot{x}_{20}}^{0})^2}{\omega_1^2}\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{-10,291 - 0,29}(-x_{20}) \Leftrightarrow C_1 = \frac{x_{20}}{10,581} \Leftrightarrow C_1 = 9,4\times10^{-2}\,x_{20}$$

$$C_2 = \frac{1}{\det[u]}\left[(u_{11}x_{20} - u_{21}\cancel{x_{10}}^{0})^2 + \frac{(u_{11}\cancel{\dot{x}_{20}}^{0} - u_{21}\dot{x}_{10})^2}{\omega_2^2}\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{-10,581}(x_{20}) \quad \Leftrightarrow C_2 = -9,4\times10^{-2}\,x_{20}$$

$$\phi_1 = tg^{-1}\,\frac{u_{22}\cancel{\dot{x}_{10}}^{0} - u_{12}\cancel{\dot{x}_{20}}^{0}}{\omega_1(u_{22}x_{20} - u_{12}x_{20})} \Leftrightarrow \phi_1 = tg^{-1}(0) \Rightarrow \phi_1 = 0$$

$$\phi_2 = tg^{-1}\,\frac{u_{11}\dot{x}_{20} - u_{21}\dot{x}_{10}}{\omega_2(u_{11}x_{20} - u_{21}x_{10})} \Rightarrow \phi_2 = 0$$

f) $\{u\}_i^T [M] \{u\}_i = e_i$ | Normalização relativamente à massa

$$\{\bar{u}\}_i = \frac{1}{\sqrt{e_i}}\{u\}_i \qquad i=1,2$$

$$\{u\}_1^T \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \{u\}_1 = e_{i_1} \Leftrightarrow \underset{(1\times2)}{\begin{bmatrix} 1 & 0,29 \end{bmatrix}} \underset{(2\times2)}{\begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}} \underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0,29 \end{bmatrix}} = e_{i_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3m & 0,29m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,29 \end{bmatrix} = e_{i_1} \Leftrightarrow e_{i_1} = 3m + 0,29^2 m \Leftrightarrow e_{i_1} = 3,0841\,m$$

$$\{\bar{u}\}_1 = \frac{1}{\sqrt{e_{i_1}}}\{u\}_1 \Leftrightarrow \{\bar{u}\}_1 = \frac{1}{\sqrt{3,0841m}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0,29 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\bar{u}\}_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{Bmatrix} 0,5693 \\ 0,166 \end{Bmatrix}$$

$$\{u\}_2^T \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \{u\}_2 = e_{i_2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -10,291 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -10,291 \end{Bmatrix} = e_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3m & -10,291m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -10,291 \end{Bmatrix} = e_2 \Leftrightarrow e_2 = 108,9\,m$$

$$\{\bar{u}\}_2 = \frac{1}{\sqrt{e_2}}\{u\}_2 \Leftrightarrow \{\bar{u}\}_2 = \frac{1}{\sqrt{108,9m}}\begin{Bmatrix} 1 \\ -10,291 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\bar{u}\}_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{Bmatrix} 0,0958 \\ -0,9861 \end{Bmatrix}$$

g) Em relação à massa (1)

$$\{\bar{u}\}_i^T [M] \{\bar{u}\}_i = 1$$

$$\{\bar{u}\}_i^T [M] \{\bar{u}\}_j = 0$$

Em relação à rigidez (2)

$$\{\bar{u}\}_i^T [K] \{\bar{u}\}_i = \omega_i^2$$

$$\{\bar{u}\}_i^T [K] \{\bar{u}\}_j = 0$$

(1) $$\frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.5693 & 0.166 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5693/\sqrt{m} \\ 0.166/\sqrt{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.5693 \times 3m}{\sqrt{m}} & \frac{0.166m}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5693/\sqrt{m} \\ 0.166/\sqrt{m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1.7079m}{\sqrt{m}} \times \frac{0.5693}{\sqrt{m}} + \frac{0.166m}{\sqrt{m}} \times \frac{0.166}{\sqrt{m}} = 1 \quad (V)$$

(2) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} 0.5693 & \frac{1}{\sqrt{m}} 0.166 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 1K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5693/\sqrt{m} \\ 0.166/\sqrt{m} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2K \times 0.5693}{\sqrt{m}} - \frac{0.166K}{\sqrt{m}} & -\frac{0.166K}{\sqrt{m}} + \frac{1 \times 0.166K}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5693/\sqrt{m} \\ 0.166/\sqrt{m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{0.9726K}{\sqrt{m}} \times \frac{0.5693}{\sqrt{m}} + \frac{0.498K}{\sqrt{m}} \times \frac{0.166}{\sqrt{m}} = \frac{0.562K}{m} + \frac{0.0329K}{m} = \frac{10.58K}{m} = \omega_1^2 \quad (V)$$

h) $$\{x(t)\} = [\bar{u}] \{\eta(t)\}$$

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = F(t)$$

$$\times [\bar{u}]^T \Rightarrow \underbrace{[\bar{u}]^T [M] [\bar{u}] \{\ddot{\eta}(t)\}}_{} + \underbrace{[\bar{u}]^T [K] [\bar{u}] \{\eta(t)\}}_{} = [\mu]^T \{F(t)\}$$

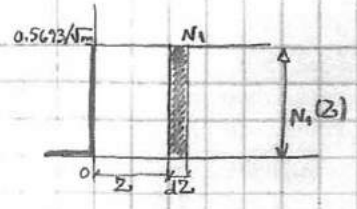
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{\eta}(t)\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \{\eta(t)\} = N(t)$$

i) $$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = N_1(t) \\ \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = N_2(t) \end{cases}$$

Eq. escrita na base modal

$$N_1(t) = (0.5693/\sqrt{m}) \times F_0 \mu(t)$$

$$N_2(t) = (0.0958/\sqrt{m}) \times F_0 \mu(t)$$



$$h(t-Z) = \frac{1}{m\,\omega_m}\,\sin\omega_1(t-Z)$$

recorrendo ao Integral de Duhamel:

$$\eta_1(t) = \int_0^t N_1(Z)\,h(t-Z)\,dZ = \ldots = -\frac{0.5693\,F_0}{\omega_1^2\sqrt{m}}\,\mu(t)(1-\cos\omega_1 t)$$

$$\eta_2(t) = -\frac{0.0958\,F_0}{\omega_2^2\sqrt{m}}\,\mu(t)(1-\cos\omega_2 t)$$

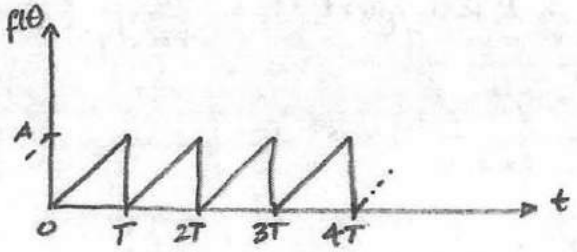
$$\begin{Bmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0.9997\,(1-\cos\omega_1 t)\\ 0.0234\,(1-\cos\omega_2 t)\end{Bmatrix}\frac{F_0\sqrt{m}\;\mu(t)}{K}$$

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix} = \left[\begin{Bmatrix}0.05693\\ 0.166\end{Bmatrix} \times 0.9997(1-\cos\omega_1 t) + \begin{Bmatrix}0.0958\\ -0.9861\end{Bmatrix} \times 0.0234\,(1-\cos\omega_2 t)\right]\frac{F_0}{K}\,\mu(t)$$

1° modo — 2° modo

—"—

1.



$f(t)$ → Função periódica

a) Determine os coeficientes da série de Fourier e a respectiva expansão.

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega t + b_m \operatorname{sen} m\omega t)}$$ SÉRIE DE FOURIER

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_M = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos m\omega t\,dt$$ → COEFICIENTES

$$b_M = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen} m\omega t\,dt$$

$f(t) = ?$

$y = mx + b \Rightarrow f(t) = \frac{A}{T}t \quad \wedge \quad \omega T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}t\,dt = \frac{2}{T}\times\frac{A}{T}\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^T =$$

$$= \frac{2A}{T^2}\times\frac{T^2}{2} \Leftrightarrow a_0 = A$$

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos m\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}t\cos m\omega t\,dt = \frac{2A}{T^2}\int_0^T t\cos m\omega t\,dt$$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[\left.\frac{t}{m\omega}\operatorname{sen} m\omega t\right|_0^T - \int_0^T \frac{1}{m\omega}\operatorname{sen} m\omega t\,dt\right] =$$

$u = t$
$du = dt$
$dv = \cos m\omega t\,dt$
$v = \frac{1}{m\omega}\operatorname{sen} m\omega t$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[\frac{T}{m\omega}\operatorname{sen} m\omega T + \frac{1}{(m\omega)^2}\cos m\omega t\,\Big|_0^T\right] =$$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[\frac{T^2}{m2\pi}\cdot\operatorname{sen} m\omega\times\frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{(m\omega)^2}\cos m\omega T - \frac{1}{(m\omega)^2}\cdot\cos 0\right]$$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[\frac{T^2}{2m\pi}\cdot\operatorname{sen} 2m\pi + \frac{T^2}{(2m\pi)^2}\cdot\cos 2m\pi - \frac{T^2}{2m\pi^2}\cdot\cos 0\right]$$

$\Leftrightarrow \boxed{a_M = 0}$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}\,n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\,t\,\text{sen}\,n\omega t\,dt = \frac{2A}{T^2}\int_0^T t\,\text{sen}\,n\omega t\,dt =$$

$u = t$
$du = dt$
$dv = \text{sen}\,n\omega t\,dt$
$v = -\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[-\frac{t}{n\omega}\cos n\omega t\Big|_0^T + \int_0^T \frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\,dt \right] =$$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[-\frac{T}{n\omega}\cos n\frac{2\pi}{T}xT + 0 + \frac{1}{(n\omega)^2}\cdot \text{sen}\,n\omega t\Big|_0^T \right] =$$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[-\frac{T^2}{2n\pi}\cos 2n\pi + \frac{1}{(n\omega)^2}\left[\text{sen}\,n\frac{2\pi}{T}2T - \text{sen}\,0\right]\right] =$$

$$= \frac{2A}{T^2}\left[-\frac{T^2}{2n\pi} + \frac{1}{(n\omega)^2}\times 0 \right] \Leftrightarrow b_n = -\frac{2A}{2n\pi} \Leftrightarrow \boxed{b_n = -\frac{A}{n\pi}}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \,\text{sen}\,n\omega t)$$

($a_n = 0$)

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{A}{n\pi}\,\text{sen}\,n\omega t\right)$$

b) Esboçar graficamente com os 3 primeiros termos

1º termo : $n = 1$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \left(-\frac{A}{\pi}\cdot \text{sen}\,\omega t\right) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{T}t$$

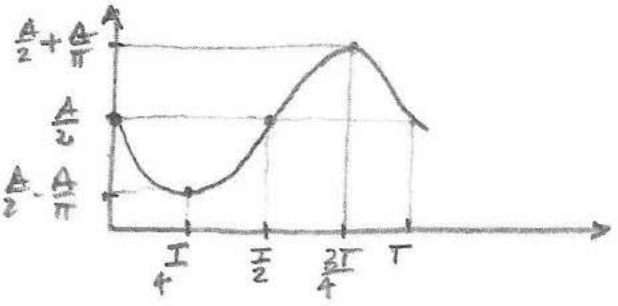
$t = 0$: $f(t) = \frac{A}{2}$

$t = \frac{T}{4}$: $f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{4} = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}$

$t = \frac{T}{2}$: $f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\,\text{sen}\,\pi = \frac{A}{2}$

$t = T$: $f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\,\text{sen}\,2\pi = \frac{A}{2}$

$t = \frac{3T}{4}$: $f(t) = A_2 + \frac{A}{\pi}$



c) Esboçar o espectro de frequências.

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \phi)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\cos n\omega t \cos\phi - \operatorname{sen} n\omega t . \operatorname{sen}\phi)$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\omega t \cos\phi - C_n \operatorname{sen} n\omega t . \operatorname{sen}\phi)$$

Comparando com $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t)$:

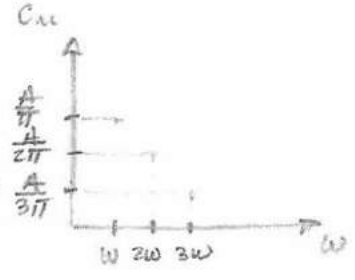
$$\begin{cases} C_0 = \frac{a_0}{2} \\ C_n \cos\phi = a_n \\ C_n \operatorname{sen}\phi = b_n \end{cases} \Rightarrow a_n^2 + b_n^2 = C_n^2(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) \Leftrightarrow$$

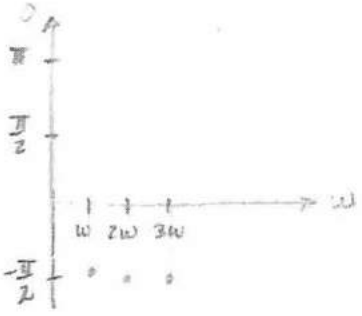
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \operatorname{sen}\phi = \frac{b_n}{C_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi = \operatorname{arc\,sen} \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \end{cases} \wedge C_0 = \frac{a_0}{2}$$

Particularizando:

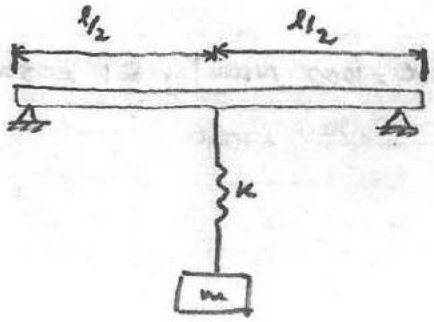
$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = -\frac{A}{n\pi} \\ a_0 = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n = \sqrt{b_n^2} \\ \phi = \operatorname{arcsen} \frac{b_n}{b_n} \\ C_0 = \frac{A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n = |b_n| \\ \phi = \operatorname{arc\,sen} 1 \\ C_0 = \frac{A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n = \frac{A}{n\pi} \\ \phi = \pi/2 \\ C_0 = \frac{A}{2} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \cos\left(n\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$





1.



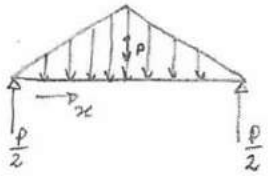
- viga de comprimento L secção EI
- bloco de massa m ligado à viga por uma mola de rigidez K

$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$ → deflexão no ponto médio

a) Constante de mola equivalente do sistema

$$\frac{1}{K_{mola}} + \frac{1}{K_{viga}} = \frac{1}{K_{eq}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_f}{EI}$$



$0 \leq x \leq \frac{l}{2} \Rightarrow M_f = \frac{P}{2}x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_f}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Px}{2EI} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4EI} + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{P}{12EI}x^3 + C_1 x + C_2$

Condições Fronteiras em $\frac{dy}{dx}$:

$x = \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{P}{4EI}\frac{l^2}{4} + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -\frac{Pl^2}{16EI}$

Cond. fronteiras em y:

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$y = \frac{P}{12EI}x^3 - \frac{Pl^2}{16EI}x$$

Para $x = \frac{l}{2}$ (onde o deslocamento é maior):

$$y = \frac{Pl^3}{96EI} - \frac{Pl^2}{16EI} \times \frac{l}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{Pl^3}{48EI}$$

$P = Kx \Leftrightarrow P = K\frac{Pl^3}{48EI} \Leftrightarrow K_{VIGA} = \frac{48EI}{l^3}$

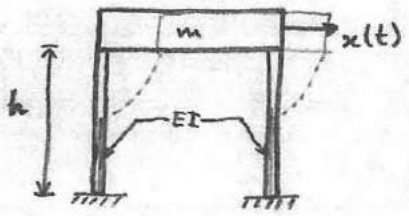
$$\frac{1}{K_{ep}} = \frac{1}{K_{VIGA}} + \frac{1}{K} \Leftrightarrow \frac{1}{K_{ep}} = \frac{K + K_{VIGA}}{K_{VIGA} \times K} \Rightarrow$$

$$K_{ep} = \frac{K_{viga} \times K}{K + K_{viga}} \Leftrightarrow K_{ep} = \frac{\frac{48EI}{l^3} \times K}{\frac{48EI}{l^3} + K}$$

b) Keq equivalente para $L = 2m$; $K = 1000\ Nm^{-1}$, $EI = 500\ Nm^2$

$$K_{eq} = \frac{\frac{48EI}{l^3} \times K}{K + \frac{48EI}{l^3}} \Rightarrow K_{eq} = \frac{\frac{48\times500}{2^3} \times 1000}{1000 + \frac{48\times500}{2^3}} \Leftrightarrow K_{eq} = \frac{3\times10^6}{4000} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow K_{eq} = 750\ N.m$

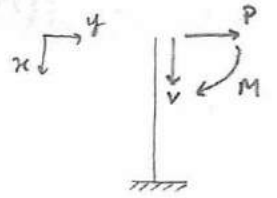


PORTIC PLANO:

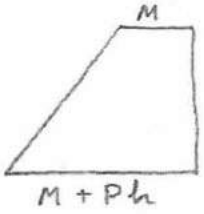
- Plataforma rígida de massa m
- duas colunas flexíveis de secção recta EI
- a plataforma só translada horizontalmente

a) A constante de rigidez para:

i). ligação rígida à plataforma



$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{EI}$$



$$M_f = M + P\frac{x}{h}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M+P\frac{x}{h}}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} - \frac{P}{EI}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{EI}x - \frac{P}{2EI}x^2 + C_1 \Rightarrow y = -\frac{M}{2EI}x^2 - \frac{P}{6EI}x^3 + C_1x + C_2$$

C. Fronteiras em dy/dx:

$x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ (não há rotação)

$x = h \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{M}{EI}h - \frac{P}{2EI}h^2 + C_1 \Leftrightarrow M = -\frac{Ph}{2}$

C. Fronteiras em y:

$$x = h \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{M}{2EI}h^2 - \frac{P}{6EI}h^3 + C_1h + C_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{h^2}{2EI}\left(M + \frac{Ph}{3}\right)$$

$$y = -\frac{M}{2EI}x^2 - \frac{P}{6EI}x^3 + \frac{h^2}{2EI}\left(M + \frac{Ph}{3}\right) \wedge M = -\frac{Ph}{2}$$

$$y = \frac{Ph}{4EI}x^2 - \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{Ph^3}{12EI}$$

O deslocamento da viga é maior em $x = 0$ (Ponto de aplicação de P)

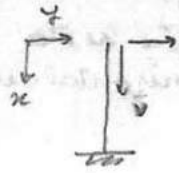
$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{Ph^3}{12EI}$$

$$P = Kx \Leftrightarrow P = K\frac{Ph^3}{12EI} \Leftrightarrow K = \frac{12EI}{h^3}$$

ii) ligação à plataforma por rótulas

⇓

não existe momento



$M_f = Px$



$M_f = Ph$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{2EI}x^2 + C_1 \Rightarrow y = -\frac{P}{6EI}x^3 + C_1x + C_2$$

• C. Fronteiras

$$x = h \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{P}{2EI}h^2 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{Ph^2}{2EI}$$

$$x = h \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{P}{6EI}h^3 + \frac{Ph^3}{2EI} + C_2 \Leftrightarrow C_2 = -\frac{Ph^3}{3EI}$$

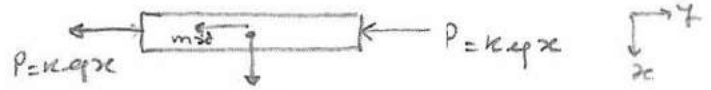
$$y = -\frac{P}{6EI}x^3 + \frac{Ph^2}{2EI}x - \frac{Ph^3}{3EI}$$

Para $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{Ph^3}{3EI}$

$$P = Kx \Leftrightarrow P = K\frac{Ph^3}{3EI} \Leftrightarrow K = \frac{3EI}{h^3}$$

b) EQUAÇÃO DO MOVIMENTO LATERAL DO PÓRTICO

FORÇAS exteriores:



$$\boxed{m\ddot{x} + 2Kx = 0}$$

c) Frequência natural de vibração (ω_n)

$EI = 163380\ Nm^2$

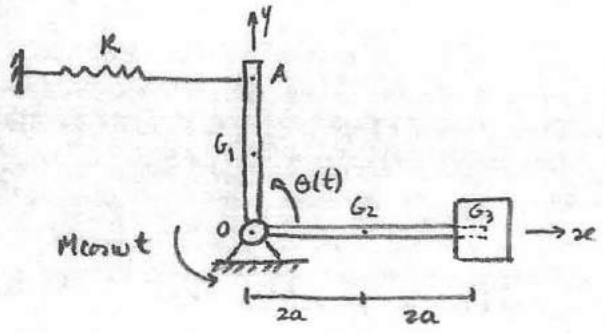
$h = 3\ m$

$m = 1000\ Kg = m_{eq}$

i) $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$ $\qquad K = \frac{12EI}{h^3} = \frac{12 \times 163380}{3^3} = 72613.3$

$2K = K_{eq} \Rightarrow K_{eq} = 2 \times 72613.3 = 145226.6\ N.m$

$\omega_n = \sqrt{\frac{145226.6}{1000}} = 12.051\ rad/s$



CORPO	massa	momento inércia
1	m_1	I_1
2	m_2	I_2
3	m_3	I_3

SISTEMA MECÂNICO:

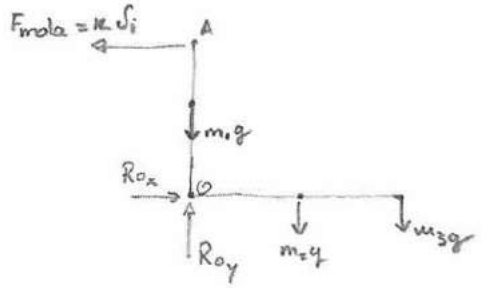
- CORPO 1, um braço, que roda em torno do ponto O, e sobre o qual actua a mola de ripidez K
- CORPO 2 um 2º braço, ripidamente ligado ao corpo 1 no ponto O, que roda em torno desse mesmo ponto
- uma massa, corpo 3, ripidamente ligada ao corpo 2.

Na posição de equil. estático, a direcção OG_2 é como o eixo xx.

No ponto O está aplicado um momento $M(t) = M\cos\omega t\ \vec{k}$

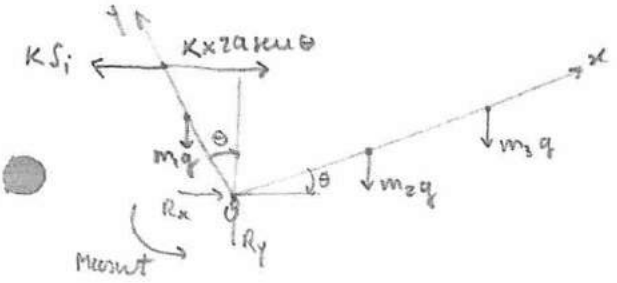
a) Eq. do movimento para pequenas oscilações em torno da posição de equil. estático.

equilíbrio estático:



$$\Sigma \vec{M} = 0$$
$$m_2 g \times 2a + m_3 g \times 4a = K\delta_i \times 2a$$

equilíbrio dinâmico:



$$\Sigma \vec{M_O} = \vec{K_O}$$
↳ momento cinético

$$\Leftrightarrow M\cos\omega t - m_2 g\cos\theta \times 2a - m_3 g\, 4a\cos\theta + m_1 g \times a \times \operatorname{sen}\theta \cdot$$
$$- K\, 2a\operatorname{sen}\theta \times 2a\cos\theta + K\delta_i\, 2a\cos\theta = \vec{K_O}$$

$$I_O = I_G + md^2 \quad \text{– TEOREMA STEINNER}$$

$$\boxed{\vec{K_O} = [I_O]\,\vec{\alpha}}$$

$$\vec{\alpha} = \ddot{\theta}$$

$$I_{O_1} = I_1 + m_1 a^2$$
$$I_{O_2} = I_2 + m_2 4a^2 \longrightarrow I_O = I_{O_1} + I_{O_2} + I_{O_3}$$
$$I_{O_3} = I_3 + m_3 16a^2$$

sendo $K_O = \vec{K}_{\theta_1} + \vec{K}_{\theta_2} + \vec{K}_{\dot{\theta}}$

$$\vec{K_O} = [I_O]\,\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_O \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{vmatrix} = I_O\,\ddot{\theta}$$

$$M\cos\omega t = I_O\ddot{\theta} + K4a^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - m_1 g a\operatorname{sen}\theta - [K\delta_i 2a - m_2 g 2a - m_3 g 4a]\cos\theta$$
($0 <$ da eq. equil. estático)

$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$
$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$
$\Big\}$ θ é muito pequeno $\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \theta$ e $\cos\theta = 1$ (desprezam-se os restantes termos da S. Taylor)

$$\boxed{I_0 \ddot{\theta} + K 4a^2 \theta - m_1 g a \theta = P_m \cos \omega t}$$

b) Freqüência natural angular ω_n.

Comparando com $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$

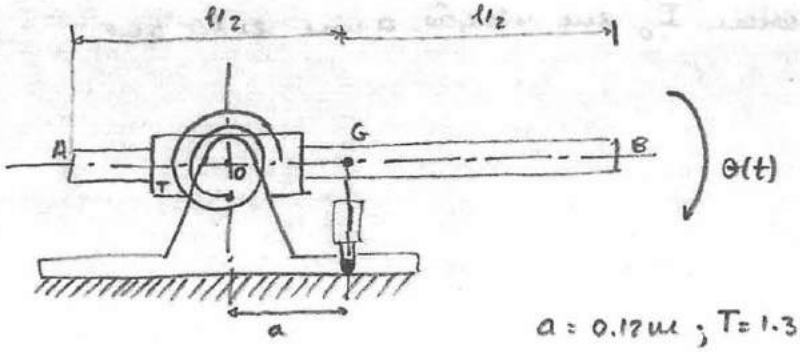
$$I_0 = m$$

$$K = 4a^2 K - m_1 g a$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{4a^2 K - m_1 g a}{I_0}}$$

c) Amortecimento crítico c_c.

$$c_c = 2m\omega_n = 2m\sqrt{\frac{4a^2 K - m_1 g a}{I_0}}$$



$a = 0.12\,m$; $T = 1.3\,s$

- uma barra AB de comprimento $l = 0.5\,m$ e $m = 1.25\,kg$ que pode deslizar no interior de um colar que roda em torno de um eixo que passa pelo ponto e relativamente ao qual possui um momento de inércia I_O^e
- uma mola de torção de rigidez $K_t = 2\,Nm/rad$
- Um amortecedor do tipo viscoso e de constante c.

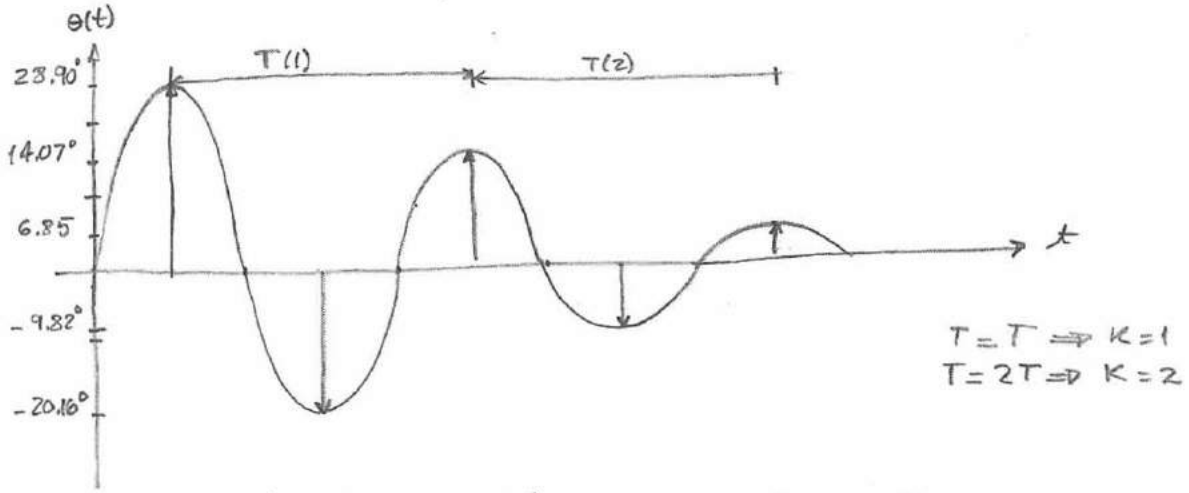
Para os deslocamentos angulares máximos em torno da posição de equilíbrio estático temos: $28.90°, -20.16°, 14.07°, -9.82°, 6.85°$

VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA

↓

DECREMENTO LOGARÍTMICO (PAG. 1.13)

a) Razão de amortecimento ξ.



$T = T \Rightarrow K = 1$

$T = 2T \Rightarrow K = 2$

$$\delta = \frac{1}{K} \ln \frac{x(t)}{x(t+Kt)} \quad , \quad \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

$K = 1$:

$$\delta = \frac{1}{K} \ln \frac{x(t)}{x(t+Kt)} = \frac{1}{1} \ln \frac{28.9}{14.07} = 0.72$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = \frac{0.72}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0.72^2}} = 0.114$$

$K = 2$:

$$\delta = \frac{1}{1} \ln \frac{14.07}{6.85} = 0.72 \Rightarrow \xi = 0.114 \Rightarrow \text{sistema sub-amortecido } \xi < 1 \quad (\text{PAG } 1.6)$$

b) Frequência natural não amortecida ω_n

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{1.3 \times \sqrt{1-0.114^2}} = 4.86\ rad/s$$

c) O momento de inércia do rotor I_0^c em relação a um eixo que passa pelo ponto O.

$$\underbrace{I_0}_{m_{eq}}\ddot{\theta} + \underbrace{ca^2}_{c_{eq}}\dot{\theta} + \underbrace{K_t}_{K_{eq}}\theta = 0$$

Comparando com $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} I_0 = m_{eq} \\ K_t = K_{eq} \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow 4.86 = \sqrt{\frac{2}{m_{eq}}} \Leftrightarrow m = \frac{2}{4.86^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_{eq} = 8.467 \times 10^{-2}\ Kg$$

$$I_0 = m_{eq} = 8.467 \times 10^{-2}\ Kg$$

$$I_0^1 = I_G + md^2 \rightarrow \text{T. Steiner}$$

$$= \frac{1}{12} ml^2 + md^2 = \frac{1}{12} \times 1.25 \times 0.5^2 + 1.25 \times 0.12^2 = 0.044$$

$$I_0^c = I_0 - I_0^1 \Leftrightarrow I_0^c = 8.467 \times 10^{-2} - 4.404 \times 10^{-2} \Leftrightarrow I_0^c = 0.04063\ Kg\,m^2$$

d) O valor da constante c do amortecedor

$$\xi = \frac{c_{eq}}{c_{c\,eq}} = \frac{c_{eq}}{2m\omega_n} \Leftrightarrow c_{eq} = 0.114 \times 2 \times 1.25 \times 4.86 \Leftrightarrow c_{eq} = 1.3851$$

$$ca^2 = c_{eq} \Leftrightarrow c = \frac{c_{eq}}{a^2} \Leftrightarrow c = \frac{1.3851}{0.12^2} \Leftrightarrow c = 96.1875$$

e) Esboçar a resposta $\theta(t)$ e a respetiva envelope de 0 até 5s.

Determinar a expressão da resposta natural do sistema a uma perturbação inicial $\theta_0 = 0.25$ rad e $\dot{\theta}_0 = 5$ rad/s

$$\theta(t) = e^{-\xi\omega_n t} A\cos(\omega_d t - \phi) \qquad \text{(PAG. 1.6)}$$

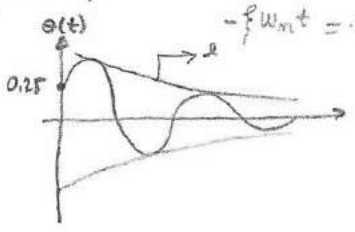
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 4.86\sqrt{1-0.114^2} = 4.83\ rad/s$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2 + x_0^2} = \sqrt{\left(\frac{5 + 0.114 \times 4.86 \times 0.25}{4.86 \times \sqrt{1-0.114^2}}\right)^2 + 0.25^2} = 1.09$$

$$\phi = tg^{-1}\frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,x_0} = tg^{-1}\frac{5 + 0.114 \times 4.86 \times 0.25}{4.86\sqrt{1-0.114^2} \times 0.25} = tg^{-1}\,4.2555 = 76.7° =$$

$$-\xi\omega_n t = -1.34 rad$$

$$\theta(t) = e^{-0.5540t} \times 1.09\cos(4.83t - 1.34)$$



f) Determinar o instante em que o sistema passa pela 1ª vez pela posição de equilíbrio estático.

$$\theta(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0.55404\,t} \times 1.09 \cos(4.83t - 1.34) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0.55404\,t} = 0 \;\vee\; \cos(4.83t - 1.34) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4.83t - 1.34 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 0.60221$$

g) Determinar o instante em que o sistema atinge o deslocamento máximo.

deslocamento máximo $\Rightarrow v = 0 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = 0$

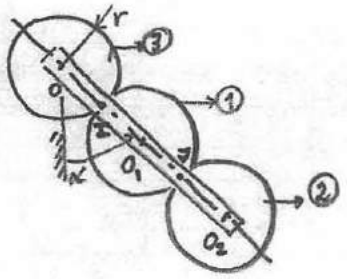
$$\dot{\theta}(t) = 0 \Leftrightarrow -0.55404\, e^{-0.55404\,t} \times 1.09 \times \cos(4.83t - 1.34) - 4.83 \times 1.09 \times e^{-0.55404\,t} \operatorname{sen}(4.83t -$$

$$\Leftrightarrow -1.09 \times e^{-0.55404\,t} \left(0.55404 \cos(4.83t - 1.34) + 4.83 \operatorname{sen}(4.83t - 1.34) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0.2536\,s$$

ou

$$\cos(4.83t - 1.34) = 1 \Leftrightarrow 4.83t - 1.34 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1.34}{4.83} = 0.2774\,s$$



- uma roda dentada (3) fixa e duas (1) e (2) móveis. Com massa m' e raio r
- uma manivela de massa m'' e de comprimento ℓ

Usando o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

a) Equação do movimento

$$T + U = \text{constante} \rightarrow \frac{d}{dt}(T+U) = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$U = mg\Delta h$$

CORPO 1:

$$\vec{v}_{O_1/30} = \vec{v}_{O_1/30} + \vec{\omega}_{30} \times \vec{OO_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2r\sin\alpha \\ -2r\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2r\cos\alpha\,\dot{\alpha} \\ 2r\sin\alpha\,\dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_{O_1/30} = \vec{v}_{O_1/10} = \vec{v}_{I/10} + \vec{\omega}_{10} \times \vec{IO_1} \iff \begin{vmatrix} 2r\cos\alpha\,\dot{\alpha} \\ 2r\sin\alpha\,\dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{10} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \iff \omega_{10} = 2\dot{\alpha}$$

$$\vec{\omega}_{10} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\dot{\alpha} \end{vmatrix} \text{ (rad/s)}$$

CORPO 2:

$$\vec{v}_{O_2/20} = \vec{v}_{O_2/30} = \vec{\omega}_{30} \times \vec{OO_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \ell\sin\alpha \\ -\ell\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\alpha}\ell\cos\alpha \\ \dot{\alpha}\ell\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_{J_{20}} = \vec{v}_{J_{10}} = \vec{\omega}_{10} \times \vec{IJ} \\ \vec{v}_{J_{20}} = \vec{v}_{O_2/20} + \vec{\omega}_{20} \times \vec{O_2J} \end{cases} \iff \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\dot{\alpha} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2r\sin\alpha \\ -2r\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ddot{\alpha}\ell\cos\alpha \\ \dot{\alpha}\ell\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{20} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -R\sin\alpha \\ R\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\iff \begin{vmatrix} 4R\cos\alpha\,\ddot{\alpha} \\ 4R\sin\alpha\,\dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\alpha}\ell\cos\alpha - \omega_{20}R\cos\alpha \\ \dot{\alpha}\ell\sin\alpha - \omega_{20}R\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \wedge 4R = \ell$$

$$\iff \begin{cases} \dot{\alpha}\ell\cos\alpha = \dot{\alpha}\ell\cos\alpha - \omega_{20}R\cos\alpha \\ \ell\sin\alpha\,\dot{\alpha} = \dot{\alpha}\ell\sin\alpha - \omega_{20}R\sin\alpha \end{cases} \iff \omega_{20} = 0$$

$I_G(\text{discos}) = \frac{1}{2} m R^2$

$I_G(\text{barra}) = \frac{1}{12} m'' L^2$

$T = T^0 + T^1 + T^2 + T^3$

$= m' R^2 \dot{\theta} \left[11 + \frac{8}{3}\lambda\right]$

$T^0 = \frac{1}{2} m' v_{G_0}^2 + \frac{1}{2} I_{G_0} \omega^2 = 0 \wedge U^0 = m'g\ell\cos\theta$

$T^1 = \frac{1}{2} m' \vec{v}_{O_1/30} + \frac{1}{2} m' R^2 \cdot \vec{\omega}_{10} \wedge U^1 = m'g(2R - 2R\cos\theta)$

$\wedge \cos\theta = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!}\right) + \frac{\alpha^4}{4!}$

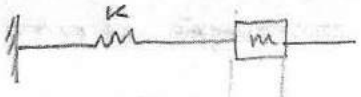
$T^2 = \frac{1}{2} m' \vec{v}_{O_2/30} + \frac{1}{2} m' R^2 \cdot \vec{\omega}_{20} \wedge \omega^2 = 0$

$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3$

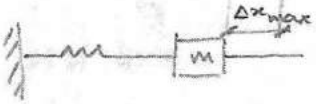
$U = m' g R \theta^2 [3 + \lambda]$

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0 \Leftrightarrow R\left(11+\frac{8}{3}\lambda\right)\ddot{\theta}+g(3+\lambda)\theta=0$$

b) Frequência natural das pequenas oscilações



$\begin{cases} v=0 \\ \Delta x=0 \end{cases}$



1 $\begin{cases} v=0 \\ \Delta x=\Delta x_{max} \end{cases}$



2 $\begin{cases} v=v_{max} \\ \Delta x=0 \end{cases}$

$T+U=C^{te}$

$0+U_1=T_2+0 \Leftrightarrow U_{max}=T_{max}$

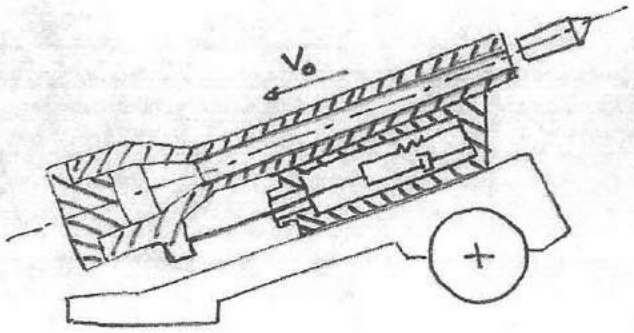
$\theta(t)=\theta\cos(\omega_m t-\phi)$

$\dot{\theta}(t)=-\theta\omega_m \underbrace{\operatorname{sen}(\omega_m t-\phi)}_{=1}$

$\dot{\theta}_{max}=-\theta\omega_m$

$(\dot{\theta}_{max})^2=\dot{\theta}\omega_m^2$

$$\begin{cases} T_{max}=m'R^2\omega_m^2\theta^2\left(11+\frac{8}{3}\lambda\right) \\ U_{max}=m'gR\theta^2(3+\lambda) \end{cases} \Rightarrow \omega_m=\sqrt{\frac{g(3+\lambda)}{R\left(11+\frac{8}{3}\lambda\right)}}$$



Um canhão com corrediça de massa m é travada por um dispositivo com propriedades de rigidez k e de amortecimento c. Conhecendo k determine:

$m = 500\,kg$
$k = 10000\,N.m^{-1}$

a) A constante c de modo que o amortecimento seja crítico.

amortecimento crítico $\Rightarrow \xi = 1 \; ; \; c = c_c \; ; \; \sqrt{\xi^2 - 1} = 0$

$$\xi = \frac{c}{c_c} \iff c = c_c$$

$$c_c = 2\sqrt{km} \Leftrightarrow c_c = 2\sqrt{10000 \times 500} \Leftrightarrow c_c = 4472.1\ Ns/m$$

$$C = 4472.1\ Ns/m$$

b) Velocidade inicial V_0, para um deslocamento máximo de valor igual a 0.3m

Deslocamento máximo $= x(t) = 0.3 \Rightarrow \dot{x}(t) = 0$

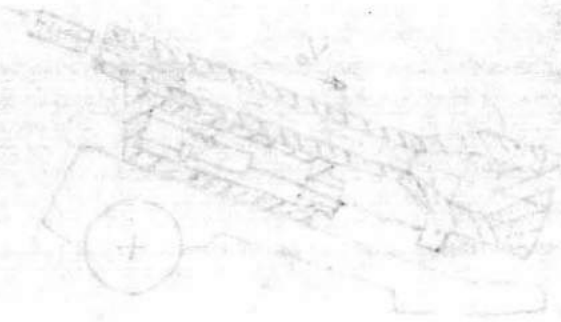
$$\dot{x}(t) = e^{-\omega_n t}\left[(V_0 + \omega_n x_0)(1 - t\omega_n) - x_0\omega_n\right]$$

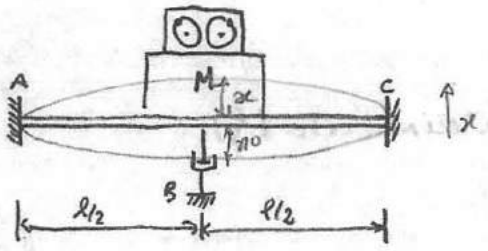
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}(t) = 0 \end{cases} \qquad 0 = \underbrace{e^{-\omega_n t}}_{\neq 0} V_0 (1 - t\omega_n) \iff 1 - t\omega_n = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\omega_n}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10000}{500}}} = 0.224\,s$$

$$x(t) = \left[x_0 + (V_0 + \omega_n x_0)t\right] e^{-\omega_n t} \Leftrightarrow 0.3 = V_0 t \times e^{-\omega_n t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_0 = \frac{0.3}{0.224 \times e^{-\sqrt{10} \times 0.224}} \Leftrightarrow V_0 = \frac{0.3}{8.226 \times 10^{-3}} \Leftrightarrow V_0 = 3.65\,m/s$$





REG. FORÇADO HARMÔNICO

Um excitador mecânico de vibrações, de massas excêntricas com rotações contrárias, de peso = 178 N

$\omega = 900$ rpm → posição de equilíbrio

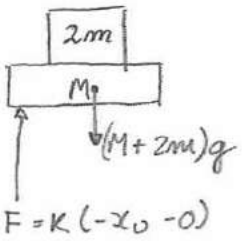
$A_{max} = 0.0216$ m

desequilíbrio $(mr) = 0.046$ kg.m

a) Equação diferencial do movimento

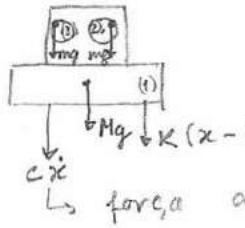
DIAGRAMA CORPO LIVRE = ESTÁTICO:

A barra funciona como uma mola ($F = kx$)



$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow (M+2m)g + kx_0 = 0 \quad (1)$

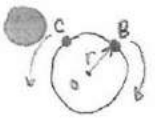
DIAG. FR. DINÂMICO:



$\Sigma \vec{F_e} = \dot{\vec{Q}} \wedge \vec{Q} = m\ddot{x}$

$-(M+2m)g - k(x+x_0) - c\dot{x} = \dot{\vec{Q}}_1 + \dot{\vec{Q}}_2 + \dot{\vec{Q}}_3$

$\vec{Q}_1 = M\ddot{x} = M \begin{vmatrix} 0 \\ \ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$



$\vec{Q}_2 = m\vec{a}_B = m[\vec{a}_0 + \alpha \times \vec{OB} - \omega^2 \vec{OB}] = m\left[\begin{vmatrix} 0 \\ \ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{vmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{Q}_2 = m \begin{vmatrix} -\omega^2 r\cos\alpha \\ \ddot{x} - \omega^2 r\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{Q}_3 = m\vec{a}_C = m(\vec{a}_0 - \omega^2 \vec{OC}) = m\left[\begin{vmatrix} 0 \\ \ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{vmatrix} -r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \right] = m \begin{vmatrix} \omega^2 r\cos\alpha \\ \ddot{x} - \omega^2 r\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ M\ddot{x} + 2m(\ddot{x} - \omega^2 r\sin\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}$

$\Sigma \vec{F_e} = \dot{\vec{Q}} \Leftrightarrow -(M+2m)g - k(x+x_0) - c\dot{x} = \dot{\vec{Q}} \Leftrightarrow \underbrace{-(M+2m)g - kx_0}_{(1)} - kx - c\dot{x} = \ddot{\vec{Q}}$

$\Leftrightarrow -kx - c\dot{x} = M\ddot{x} + 2m(\ddot{x} - \omega^2 r\sin\alpha) \Leftrightarrow M\ddot{x} + 2m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 2m\omega^2 r\sin\alpha$

$\Leftrightarrow (M+2m)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 2m\omega^2 r\sin\alpha$

b) Frequência natural (ω_n) e o factor de amortecimento (ξ)

Para $\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = 1 \wedge \beta = \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow 1 = \frac{\omega}{\omega_n} \Leftrightarrow \omega = \omega_n = 900 \text{ rpm} = \frac{900 \times 2\pi}{360} =$

$= 94.25 \text{ rad/s}$

ou

$$\phi = tg^{-1} \frac{\omega c}{K - \omega^2 M} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = arc\,tg \frac{c\omega}{K - \omega^2 M} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg \frac{c\omega}{K - \omega^2 m} = \infty \Leftrightarrow K - M\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \Leftrightarrow \omega = \omega_n$$

$$X(\omega) = \frac{F}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \wedge \beta = 1 \wedge F = 2m\omega^2 r \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \wedge X(\omega) = 0.0216 \text{ m}$$

$$0.0216 = \frac{2mR\omega^2}{K\sqrt{(2\xi\beta)^2}} \Leftrightarrow 0.0216 = \frac{2 \times 0.046 \times 94.25^2}{1611453 \times 2 \times \xi \times 1} \Leftrightarrow \xi = \frac{0.046}{3.923} = 1.17 \times 10^{-2}$$

$$K = M\omega^2 \Leftrightarrow K = \frac{1780}{9.8} \times 94.25^2 = 1611453$$

c) Amplitude máxima e o desfasamento para $\omega = 1200 \text{ rpm} = 125.66 \text{ rad/s}$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \beta = \frac{94.25}{125.66} \Rightarrow \beta = 1.33$$

$$X(\omega) = \frac{F}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{2mR\omega^2}{K\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0.00116 \text{ m}$$

$$\phi = arc\,tg \frac{c\omega}{K - \omega^2 M} \quad \text{ou} \quad \phi = \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)} = 3.1 \text{ rad} = 177.691^\circ$$

d) A força transmitida ao apoio B para $\omega = 1200 \text{ rpm}$

$$F_B = c\dot{x}$$

$$\frac{c}{K} = \frac{2\xi}{\omega_n} \Leftrightarrow c = \frac{2\xi K}{\omega_n}$$

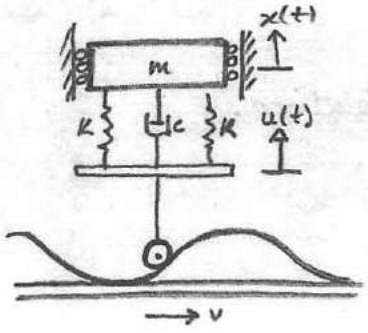
$$K = M\omega^2 = \frac{1780}{9.8} \times 125.66^2$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} =$$

$$x = X(\omega)\cos(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x} = -X(\omega)\,\omega \operatorname{sen}(\omega t - \phi) = -0.00116 \times 125.66 \times \underbrace{\operatorname{sen}(125.66\,t - 3.1)}_{=1}$$

$$F = c\dot{x} \Leftrightarrow F = -58.691 \text{ N}$$



Mov. HARMÓNICO

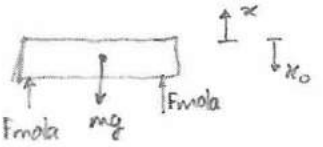
- A massa m só se desloca verticalmente
- Comprimento de onda da superfície (λ)
- Amplitude U

$m = 1Kg$; $U = 0.05\,m$; $c = 30\,N\,s/m$; $K = 350\,N.m$
$\lambda = 0.5\,m$; $v = 1.6\,m/s$

a) Eq. diferencial do movimento

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F\cos(\omega t + \alpha)$$

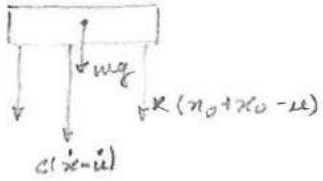
Equilíbrio estático:



$F_{mola} = Kx_0$

$\Sigma F = 0 \iff mg = -2Kx_0$

Equilíbrio dinâmico:



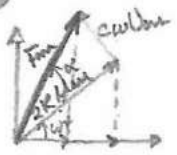
$$\Sigma \vec{F_e} = \dot{\vec{Q}} \Rightarrow \Sigma \vec{F_e} = m\ddot{x} \iff$$

$$\iff -2K(x_0 + x_0 - u) - mg - c(\dot{x} - \dot{u}) = m\ddot{x}$$

$$\iff m\ddot{x} + 2K(x + x_0 - u) + c(\dot{x} - \dot{u}) - 2Kx_0 = 0$$

$$\iff m\ddot{x} + 2Kx + 2Kx_0 - 2Ku + c\dot{x} - c\dot{u} - 2Kx_0 = 0$$

$$\iff m\ddot{x} + c\dot{x} + 2Kx = \underbrace{2Ku + c\dot{u}}_{F\cos(\omega t + \alpha)}$$



$$\begin{cases} u = U_m \cos\omega t \\ \dot{u} = -\omega U_m \operatorname{sen}\omega t \end{cases} \iff \begin{cases} 2Ku = 2KU_m\cos\omega t \\ c\dot{u} = -c\omega U_m \operatorname{sen}\omega t \end{cases}$$

Pelo Teorema de Pitágoras: $F_m^2 = (c\omega U_m)^2 + (2KU_m)^2 \iff$

$\iff F_m = \sqrt{(c\omega U_m)^2 + (2KU_m)^2}$

$\omega = ?$ $\quad \begin{cases} \lambda = vT \\ T = \frac{2\pi}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \lambda = v\frac{2\pi}{\omega} \iff \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi \times 1.6}{0.5} \iff \omega = 20.1\ rad/s$

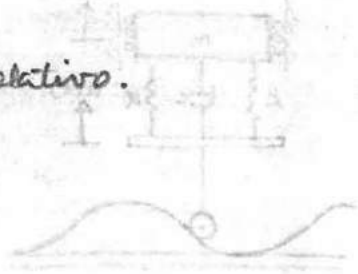
$$F_m = \sqrt{(30 \times 20.1 \times 0.05)^2 + (2 \times 350 \times 0.05)^2} \iff F_m = 46.2\,N$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c\omega U_m}{2KU_m} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{c\omega}{2K} = \operatorname{arc\,tg}\frac{30 \times 20.1}{2 \times 350} = 0.711$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 2Kx = F\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\boxed{\ddot{x} + 30\dot{x} + 700x = 46.2\cos(20.1t + 0.711)}$$

b) TRANSMISSIBILIDADE TR dos movimentos absoluto e relativo.



$$TR = \frac{X(\omega)}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_M}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{700}{1}} \Leftrightarrow \omega_m = 26.45 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \frac{20.1}{26.45} \Leftrightarrow \beta = 0.76$$

$$\xi = \frac{c}{c_c}$$

$$c_c = 2\sqrt{K_{eq}.m_{eq}} = 2\sqrt{700} = 52.9$$

$$\xi = \frac{30}{52.9} \Leftrightarrow \xi = 0.57$$

$$TR = \frac{\sqrt{1+(2\times0.57\times0.76)^2}}{\sqrt{(1-0.76^2)^2+(2\times0.57\times0.76)^2}} \Leftrightarrow TR = 1.37$$

$$TR_R = \frac{Z(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = \frac{0.76^2}{\sqrt{(1-0.76^2)^2+(2\times0.57\times0.76)^2}} \Leftrightarrow TR_R = 0.602$$

c) As velocidades do tapete para a qual o sistema entra em ressonância de amplitude e de fase.

$$\beta|_{TR_{max}} = \frac{1}{2\xi}\left[\sqrt{1+8\xi^2}-1\right]^{1/2} = \frac{1}{2\times0.57}\times\left[\sqrt{1+8\times0.57^2}-1\right]^{1/2} = 0.824$$

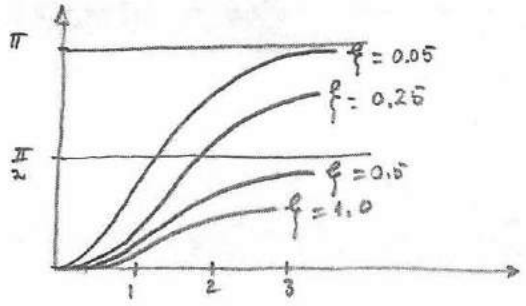
$$\beta = \frac{\omega}{\omega_m} \Leftrightarrow \omega = 0.824\times 26.45 \Leftrightarrow \omega = 21.8 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \wedge T = \frac{\lambda}{v} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{\lambda}{v}} \Leftrightarrow v = \frac{\lambda}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{0.5}{0.288} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = 1.736 \text{ m/s}$$

↳ em ressonância de amplitude

$$\psi = tg^{-1}\frac{2\xi\beta^3}{1-\beta^2+(2\xi\beta)^2} \rightarrow \frac{d\psi}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3\omega_n^2}{1-4\xi^2}}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{3\omega_n^2}{1-4\xi^2}} \quad \wedge \quad \xi = 0.57 \; ; \; \omega_n = 26.45 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3\times 26.45^2}{1-4\times 0.57^2}} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{-5506.4} \quad (\text{nº imaginário})$$

A ressonância de fase aumenta com ω, logo a velocidade também.
A velocidade será máxima quando ψ for máximo, isto é, $\frac{\pi}{2}$

d) Amplitude máxima do deslocamento da massa

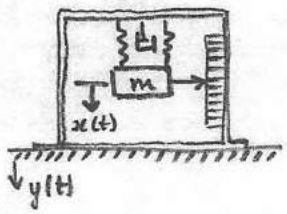
$$X_{max} = T_{R\,max} \times U_{max}$$

$$T_{R\,max} = +\xi^2\left[\frac{\sqrt{1+8\xi^2}}{2+16\xi^2+(16\xi^4-8\xi^2-2)\sqrt{1+8\xi^2}}\right]^{1/2} = \left[\frac{1,89}{1,677}\times 1,2996\right]^{1/2}$$

$$T_{R\,max} = 1,21$$

$$X_{max} = 1,21 \times 0,05 \Leftrightarrow \boxed{X_{max} = 0,0605\,m}$$

(CAP. 2)



TRANSDUTOR DE VIBRAÇÕES montado sobre um componente de uma máquina sujeito a um **MOVIMENTO HARMÓNICO**

$\omega_m = 8$ rad/s

$\xi = 0.2$

$\omega = 40$ rad/s

$Z = \frac{8}{2} = 4$ mm

↳ amplitude do mov. relativo

a) Amplitude do movimento do componente mecânico

$TR_r = \frac{Z}{Y} \Leftrightarrow Y = \frac{Z}{TR_r} = ?$ $\quad \beta = \frac{\omega}{\omega_m} = \frac{40}{8} = 5$

$TR_r = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \Leftrightarrow TR_r = \frac{5}{\sqrt{(1-25)^2 + (2\times 0.2\times 5)^2}} \rightarrow TR_r = 1.038$

$Y = \frac{Z}{TR_r} \Leftrightarrow Y = \frac{4\times 10^{-3}}{1.038} \Leftrightarrow Y = 3.85$ mm

b) Erro cometido ao considerar a amplitude do movimento y(t) como sendo a amplitude medida na régua.

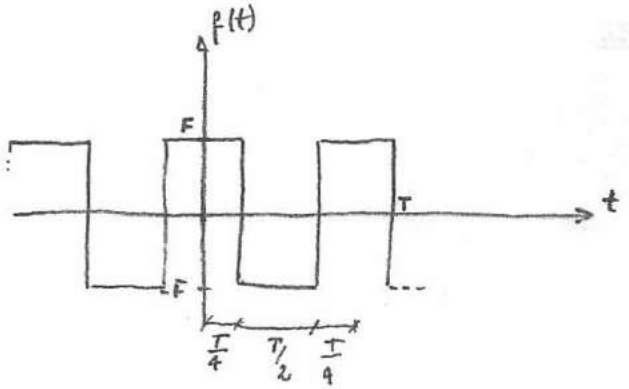
$\text{Erro} = \left| \frac{Z-Y}{Y} \right| \times 100 = \frac{4-3.85}{3.85} \times 100 = 3.89\%$

c) Como proceder para atenuar o erro da alínea b.

Aumentando a massa, o que faria diminuir ω_m, logo o β aumentava.



R. PERIÓDICO (CAP. 3)



$f(t)$ → força exterior periódica que actua sobre um sistema massa-mola-amortecedor em regime permanente

a) Espectro da função de excitação $f(t)$ e da resposta $x(t)$ do sistema.

$$f(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} F_p \cos(p\omega t - \psi_p)$$

$f(t)$ é uma função par $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^t f(t)\cos p\omega t\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^t f(t)\,\text{sen}\, p\omega t\,dt$$

$$F_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} = a_p$$

$$f(t) = \begin{cases} F & \text{se} \quad 0 < t < T/4 \\ -F & \text{se} \quad T/4 < t < 3/4\,T \\ F & \text{se} \quad 3/4\,T < t < T \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/4} F\,dt + \int_{T/4}^{3/4T} -F\,dt + \int_{3/4T}^{T} F\,dt\right] =$$

$$= \frac{2}{T}\left[Ft\Big|_0^{T/4} - Ft\Big|_{T/4}^{3/4T} + Ft\Big|_{3/4T}^{T}\right] = \frac{2}{T}\left(\frac{FT}{4} - F\left(\frac{3}{4}T - \frac{T}{4}\right) + F\left(T - \frac{3}{4}T\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\frac{FT}{4} - \frac{2FT}{4} + \frac{FT}{4}\right) = 0$$

$$a_p = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos p\omega t\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/4} F\cos p\omega t\,dt + \int_{T/4}^{3/4T} -F\cos p\omega t\,dt + \int_{3/4T}^{T} F\cos p\omega t\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{F}{p\omega}\,\text{sen}\, p\omega t\Big|_0^{T/4} - \frac{F}{p\omega}\,\text{sen}\, p\omega t\Big|_{T/4}^{3/4T} + \frac{F}{p\omega}\,\text{sen}\, p\omega t\Big|_{3/4T}^{T}\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{F}{p\omega}\,\text{sen}\, p\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{4} - \frac{F}{p\omega}\left(\text{sen}\, p\frac{2\pi}{T}\frac{3T}{4} - \text{sen}\, p\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{4}\right) + \frac{F}{p\omega}\left(\text{sen}\, p2\pi - \text{sen}\, p\frac{2\pi}{T}\frac{3}{4}T\right)\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{F}{p\omega}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}p - \frac{F}{p\omega}\left(\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi p - \text{sen}\,\frac{\pi}{2}p\right) + \frac{F}{p\omega}\left(\text{sen}\, 2\pi p - \text{sen}\,\frac{3}{2}\pi p\right)\right]$$

$$= \frac{2F}{T p\omega}\left[\text{sen}\,\frac{\pi}{2}p - \text{sen}\,\frac{3}{2}\pi p + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}p - \text{sen}\,\frac{3}{2}\pi p\right] = \qquad \text{sin}\,\frac{\pi}{2} = -\text{sin}\,\frac{3\pi}{2}$$

$$= \frac{2F\,T}{T p 2\pi}\times 2\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}p - \text{sen}\,\frac{3}{2}\pi p\right) = \frac{2F}{p\pi}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}p - (-\text{sen}\,\frac{\pi}{2}p)\right) =$$

$$= \frac{2F}{p\pi}\times 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}p = \frac{4F}{p\pi}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}p$$

$$F_p = a_p = \frac{4F}{\pi p} \text{ sen } \frac{\pi}{2} p \begin{cases} \pm \frac{4F}{\pi p} & \text{se } p \text{ impar} \\ 0 & \text{se } p \text{ par} \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{p=1}^{\infty} F_p \cos p\omega t$$

Resposta:

$$X(t) = \sum_{p=1}^{\infty} X_p \cos(p\omega t - \phi_p)$$

$$X_p = X_{sp} \times \mu_p = \frac{F_p}{k} \times \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_p^2)^2 + (2\xi\beta_p)^2}} =$$

$$= \frac{4F}{\pi p k} \times \mu_p \quad \wedge \quad X_s = \frac{F}{k} \rightarrow \text{deslocamento estático}$$

$$\frac{X_p}{X_s} = \frac{4F}{\pi p k} \times \frac{k}{F} \times \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_p^2)^2 + (2\xi\beta_p)^2}}$$

b) Representar graficamente para os primeiros nove harmónicos as razões $\frac{F_p}{F}$ e $\frac{X_p}{X_s}$ em:

i) $\omega_n = 0.8\omega$, $\xi = 0.05$

ii) $\omega_n = 5.3\omega$, $\xi = 0.05$

i) $\beta_p = p\beta = p\frac{\omega}{\omega_n} = p\frac{\omega}{0.8\omega} = 1.25p$

ii) $\beta_p = p\frac{\omega}{\omega_n} = p\frac{\omega}{5.3\omega} = 0.1887p$

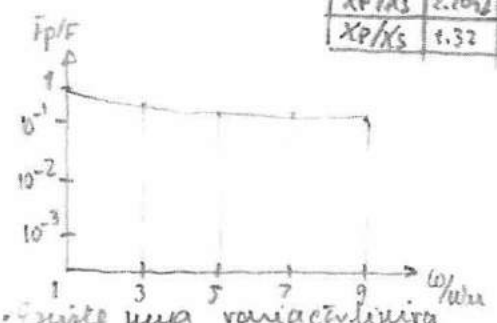
i) $$\frac{X_p}{X_s} = \frac{4}{p\pi} \times \left[(1 - 1.5625p^2)^2 + 0.015625p^2\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{4}{p\pi} \times \left(1 - 3.125p^2 + 2.44p^4 + 0.015625p^2\right)^{-1/2}$$

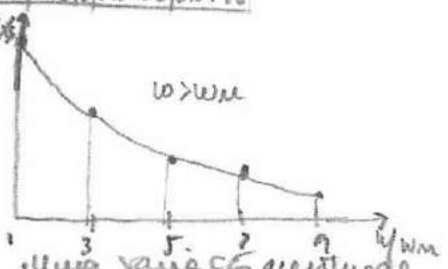
$$= \frac{4}{p\pi} \times \left(1 + 2.44p^4 - 3.109p^2\right)^{-1/2}$$

ii) $$\frac{X_p}{X_s} = \frac{4}{p\pi} \left[(1 - 3.5mx10^{-2}p^2)^2 + 3.56 \times 10^{-4}p^2\right]^{-1/2}$$

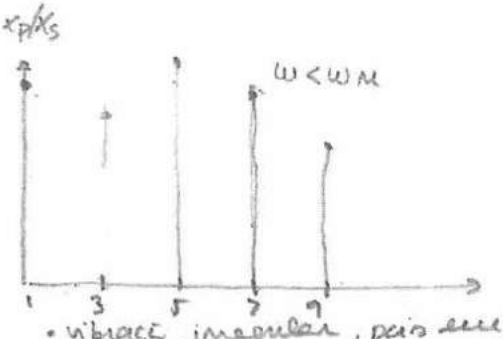
p	1	3	5	7	9
F_p/F	1.2732	0.4244	0.2546	0.1819	0.1415
X_p/X_s	2.2062	0.0325	0.0067	0.0024	0.0011
X_p/X_s	1.32	0.6724	1.2572	0.2406	0.0748



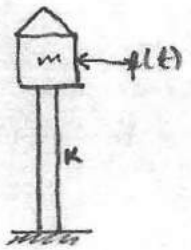
- Existe uma variação brusca
- Temos como resposta um harmónico próximo do pico



- Uma variação acentuada
- É uma vibração típica de um filtro passa-baixo



- vibração irregular, pois como p=5 o harmónico está perto da frequência de ressonância

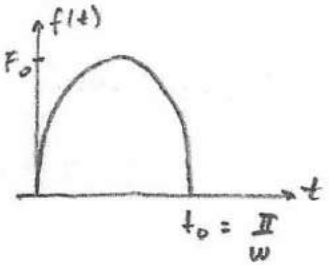


REGIME TRANSIENTE (CAP. 4)

DEPOSITO DE ÁGUA COM PESO P

Desprezando o amortecimento

Determine a resposta $x(t)$ à solicitação $f(t)$ representada na figura pela:



a) $0 \leq t \leq t_0 = \frac{\pi}{\omega}$ s

b) $t > t_0 = \frac{\pi}{\omega}$ s

$$f(t) = \begin{cases} F_0 \sin \omega t & \text{para } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{para } t_0 < t \end{cases}$$

a) $dx(t) = f(\tau)\, d\tau\, h(t-\tau)$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad , \quad 0 \leq t \leq t_0$$

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau)$$

NÃO HÁ AMORTECIM. $\begin{cases} \xi = 0 \\ \omega_d = \omega_n \end{cases} \Rightarrow h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_n} \cdot \sin \omega_n (t-\tau)$

$$x(t) = \int_0^t F_0 \sin(\omega\tau) \times \frac{1}{m\omega_n} \cdot \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^t \sin\omega\tau \cdot \sin\omega_n(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n} \cdot \frac{1}{2} \int_0^t \cos(\omega\tau - \omega_n t + \omega_n\tau) - \cos(\omega\tau + \omega_n t - \omega_n\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_n} \int_0^t \cos[(\omega+\omega_n)\tau - \omega_n t] - \cos[(\omega-\omega_n)\tau + \omega_n t]\, d\tau$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_n} \left[\frac{1}{\omega+\omega_n} \operatorname{sen}[(\omega+\omega_n)\tau - \omega_n t] \Big|_0^t - \frac{1}{\omega-\omega_n} \operatorname{sen}[(\omega-\omega_n)\tau + \omega_n t] \Big|_0^t \right]$$

$$= \ldots = \frac{F_0}{2m\omega_n} \times \left(\frac{\omega \operatorname{sen}\omega_n t - \omega_n \operatorname{sen}\omega t}{\omega^2 - \omega_n^2} \right) = \frac{F_0}{m\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)} (\omega \operatorname{sen}\omega_n t - \omega_n \operatorname{sen}\omega t)$$

Sendo $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$ e $m(\omega_n^2 - \omega^2) = k(1-\beta^2)$

$$x(t) = \frac{F_0}{k(1-\beta^2)\omega_n} (\omega_n \operatorname{sen}\omega_n t - \omega \operatorname{sen}\omega_n t) = \frac{F_0}{k(1-\beta^2)} (\operatorname{sen}\omega_n t - \beta \operatorname{sen}\omega_n t)$$

b) $t > t_0 = \frac{\pi}{\omega}$ s

$$x(t) = \int_0^{t_0} f(\tau) \, h(t-\tau) \, d\tau$$

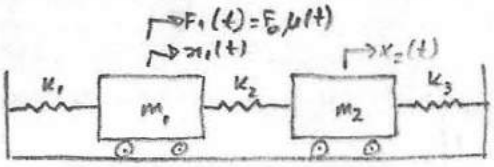
$$\equiv$$

Admitindo que quando acaba a solicitação estamos numa solicitação livre

$$x(t = t_0) = x_0$$
$$\dot{x}(t - t_0) = \dot{x}_0$$

$$\bar{t} = t - t_0$$

$$x(t) = \frac{F_0}{K} \frac{\beta}{\beta^2 - 1} \left[\operatorname{sen} \omega_n t + \operatorname{sen} \omega_n \left(t - \frac{\pi}{\omega} \right) \right]$$

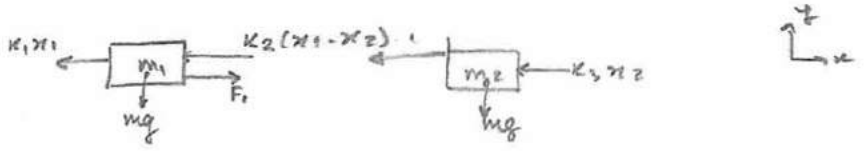


$k_1 = k_2 = k$, $k_3 = 3k$

$m_1 = 3m$, $m_2 = m$

SISTEMA NÃO AMORTECIDO COM 2 GRAUS DE LIBERDADE

a) EQ. DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO.



$$\begin{cases} \Sigma F = m_1 \ddot{x}_1 \\ \Sigma F = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3 x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_1(t) \\ m\ddot{x}_2 + 4kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

b) $[m]$; $[k]$, $\{x(t)\}$, $\{\ddot{x}(t)\}$

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 4k \end{bmatrix} \quad \{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}$$

c) Frequências naturais de vibração (ω)

$$[[k] - \omega^2[m]]\{u\} = 0$$

$$|[k] - \omega^2[m]| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 4k \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = 0.75\sqrt{k/m} \quad \vee \quad \omega_2 = 2.02\sqrt{k/m}$$

d) Formas naturais de vibração. Esboço.

u ~ modos naturais

$$[[k] - \omega^2[m]]\{u\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 3m & -k \\ -k & 4k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix}$ $\omega = \omega_1$ $\quad$ $\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}$ $\omega = \omega_2$

$$\begin{cases} (2k - \omega^2 3m)\, u_{11} - k u_{21} = 0 \\ -k u_{11} + (4k - \omega^2 m) u_{21} = 0 \end{cases}$$

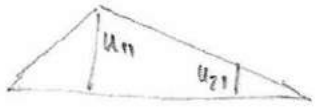
Para $\omega = \omega_1 = 0.75\sqrt{k/m}$ e $\boxed{u_{11} = 1}$

$$[2k - 0.75^2 \times \frac{k}{m} \times 3m] \times 1 - k u_{21} = 0 \Leftrightarrow u_{21} = 0{,}29$$

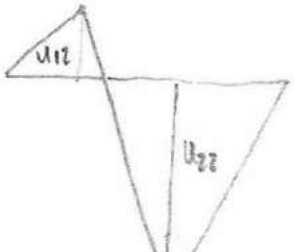
Para $\omega = \omega_2 = 2.02\sqrt{k/m}$ e $\boxed{u_{12} = 1}$

$$u_{22} = -10{,}291$$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}29 \end{Bmatrix} \qquad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -10{,}291 \end{Bmatrix}$$



movimento em fase



mov. em oposição de fase.

e) Resposta natural do sistema
Normalizam os vectores modais do modo e os menos modais
Hipótese inicial

$\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_{10} = 0$ $\quad x_{20} = x_2(t=0)$

$x_1(t=0) = x_{10} = 0$ $\quad \dot{x}_{20} = 0$

$$[u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}29 & -10{,}291 \end{bmatrix}$$

$x_1(t=0) = x_{10} = 0$ $\quad x_2(t=0) = x_{20} = 0$

$\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_{10} = 0$ $\quad \dot{x}_2(t=0) = \dot{x}_{20} = 0$

$$\begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)^2$$

$$C_1 = \frac{1}{\det[u]} \times \left[(u_{22} x_{10} - u_{12} x_{20})^2 + \frac{(u_{22} \dot{x}_{10} - u_{12} \dot{x}_{20})^2}{\omega_1^2} \right]^{1/2}$$

$$C_1 = 9.4 \times 10^{-2}\, x_{20}$$

$$C_2 = \frac{1}{\det[u]} \left[(u_{11} x_{20} - u_{21} \times x_{10})^2 + \frac{(u_{11} \dot{x}_{10} - u_{21} \dot{x}_{10})^2}{\omega_2^2} \right]^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow C_2 = -9{,}9 \times 10^{-2}\, x_{10}$$

$\phi_1 = 0$

$\phi_2 = 0$

f) Normalizar os vetores modais de modo que as massas modais sejam unitárias

$$\{u\}_i^T [M] \{u\}_i = c_i$$

$$\{\bar{u}\}_i = \frac{1}{\sqrt{c_i}} \{u\}_i$$

} Normalização relativamente à massa

$$\{u\}_1^T = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \{u\}_1 = c_{i_1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0{,}29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}29 \end{bmatrix} = c_{i_1}$$

$$\Rightarrow c_{i_1} = 3{,}0841\, m$$

$$\{\bar{u}\}_1 = \frac{1}{\sqrt{c_{i_1}}} \{u\}_1 = \frac{1}{\sqrt{3{,}0841\, m}} \times \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}29 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0{,}5693 \\ 0{,}166 \end{Bmatrix}$$

$$\{u\}_2^T \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \{u\}_2 = c_{i_2} \Rightarrow \quad c_{i_2} = 108{,}9\, m$$

$$\{\bar{u}\}_2 = \frac{1}{\sqrt{c_{i_2}}} \{u\}_2 \quad (=) \quad \{\bar{u}\}_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0{,}0958 \\ -0{,}09861 \end{Bmatrix}$$

g) Verificar as propriedades de ortogonalidade dos formas modais relativamente às matrizes de massa e de rigidez.

em relação a [M]

$$\{\bar{u}\}_i^T [M] \{\bar{u}\}_i = 1$$

$$\{\bar{u}\}_i^T [M] \{\bar{u}\}_j = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.5693 & 0.166 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5696/\sqrt{m} \\ 0{,}166/\sqrt{m} \end{bmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \text{(V)}$$

em relação à rigidez [K]:

$$\{\bar{u}\}_i^T [K] \{\bar{u}\}_i = \omega_i^2$$

h) Exprimir as eq. do movimento na base modal

$$\{x(t)\} = [\bar{u}]\{\eta(t)\} \qquad \{\ddot{x}(t)\} = [\bar{u}]\{\ddot{\eta}(t)\}$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = F(t) \quad (1)$$

substituindo em (1):

$$[M][\bar{u}]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K][\bar{u}]\{\eta(t)\} = \{F(t)\}$$

$\times [\bar{u}]^T$:

$$\underbrace{[\bar{u}^T][M][\bar{u}]}\{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{[\bar{u}]^T[K][\bar{u}]}\{\eta(t)\} = \underbrace{[\bar{u}]^T}\{F(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{\ddot{\eta}(t)\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}\{\eta(t)\} = N(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = N_1(t) \\ \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = N_2(t) \end{cases}$$

i) Determinar a resposta do sistema à excitação $\{F(t)\} = \{F_0 \mu(t) \; 0\}^T$ utilizando a análise modal

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = N_1(t) \\ \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = N_2(t) \end{cases}$$

$$N_1(t) = [\bar{u}]_1^T \{F(t)\} = [0.5693/\sqrt{m} \quad 0.166/\sqrt{m}] \begin{Bmatrix} F_0 \mu(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

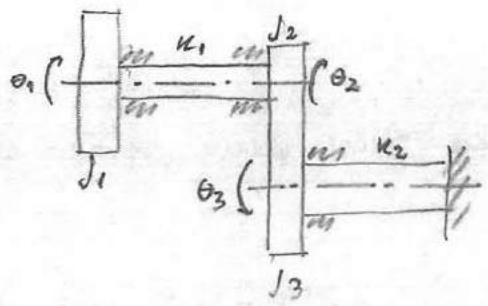
$$N_1(t) = \frac{0.5693}{\sqrt{m}} \times F_0 \mu(t)$$

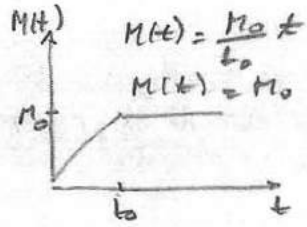
$$N_2(t) = [\bar{u}]_2^T \{F(t)\} = [0.0958/\sqrt{m}] \times F_0 \mu(t)$$

$$\eta_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t N_1(\tau) \sin\omega_1(t-\tau)\, d\tau + \eta_1(0)\cos\omega_1 t + \frac{\dot{\eta}_1(0)}{\omega_1}\sin\omega_1 t$$

$$= \frac{0.5693 F_0}{\omega_1^2 \sqrt{m}} \mu(t)(1-\cos\omega_1 t)$$

$$\eta_2(t) = -\frac{0.0958 F_0}{\omega_2^2 \sqrt{m}} \mu(t)(1-\cos\omega_2 t)$$





SISTEMA COM 2 GRAUS DE LIBERDADE

O movimento entra pela roda 1 e transmite-se ao 2º veio pelas rodas 2 e 3 cuja razão de raios $\frac{R_2}{R_3} = n$

$J_1 = 0.2 \text{ kg m}^2$ $\quad J_2 = 0.05 \text{ kg m}^2$ $\quad J_3 = 0.1 \text{ kg m}^2$

$K_1 = K_2 = 20 \text{ Nm}$ $\quad n = 4 \Rightarrow \frac{R_2}{R_3} = 4$

a) Equações do movimento torsional do sistema

$$r_2 \theta_2 = r_3 \theta_3 \Rightarrow \theta_3 = \frac{r_2}{r_3} \theta_2 \Leftrightarrow \theta_3 = 4\theta_2 \Rightarrow \ddot{\theta}_3 = 4\ddot{\theta}_2$$

EQUAÇÕES DE LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \bar{Q}_i$$

$L = T - V$ $\quad q_1 = \theta_1 \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{\theta}_1$

$q_2 = \theta_2 \Rightarrow \dot{q}_2 = \dot{\theta}_2$

$E_c: \quad T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3$

$E_p: \quad V = \int_0^{\theta_2 - \theta_1} \underbrace{K t_1}_{M} \theta \, d\theta + \int_0^{\theta_3} K t_2 \theta \, d\theta$

$L = T - V \Leftrightarrow L = \ldots \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \left(\frac{R_2}{R_3} \dot{\theta}_2\right)^2 - K t_1 \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{2} - K t_2 \left(\frac{r_2}{r_3} \theta_3^2\right) \times \frac{1}{2}$

$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = K t_1 (\theta_2 - \theta_1)$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = J_1 \dot{\theta}_1$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(J_1 \dot{\theta}_1\right) = J_1 \ddot{\theta}_1$

$\bar{Q}_1 = M t_1$

$\bar{Q}_2 = 0$ pois o veio de rigidez k_2 tem uma extremidade encastrada.

1ª Eq: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \bar{Q}_1 \iff 0.2\ddot{\theta}_1 + 20\theta_1 - 20\theta_2 = M t_1$

2ª Ep: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = \bar{Q}_2 \iff 1.65\ddot{\theta}_2 - 20\theta_1 + 340\theta_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 1.65 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 340 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Mt_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[m]\{\ddot{q}\} + [k]\{\theta\} = \{F(t)\}$$

b) Modos naturais de vibração $(\omega_1, \omega_2;\ \{u\}_1, \{u\}_2)$

$$[[K] - \omega^2[M]]\{u\} = \{0\}$$

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \rightarrow \text{det. característico}$$

$\Rightarrow \omega_1 = 9.465 \quad \vee \quad \omega_2 = 14.7$

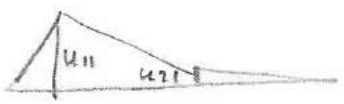
- $[[K] - \omega_1^2[M]]\{u\}_1 = \{0\} \wedge \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_1} \wedge u_{11} = 1$

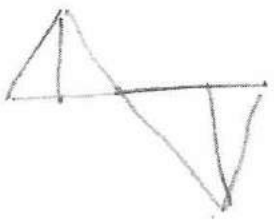
$\Rightarrow u_{21} = 0.104$

- $[[K] - \omega_2^2[M]]\{u\}_2 = \{0\} \wedge \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}_{\omega=\omega_2} \wedge u_{12} = 1$

$\Rightarrow u_{22} = -1.165$

c) Representa graficamente as formas naturais $(u_1 < u_2)$





d) Resposta do sistema durante a fase de arranque, para um momento motor do tipo representado na figura.

$\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$

$$\{\bar{u}\}_i = \frac{1}{\sqrt{c_i}}\{u\}_i \quad \wedge \quad c_i = \{u\}_i^T [M] \{u\}_i$$

$$\{u\}_1^T [M] \{u\}_1 = c_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 1.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.104 \end{bmatrix} =$$

$$\Leftrightarrow c_1 = 0.218$$

$$\{\bar{u}\}_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\{u\}_1 = \frac{1}{0.218}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.104 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.1418 \\ 0.223 \end{Bmatrix}$$

$$\{u\}_2^T [m] \{u\}_2 = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 2.4368$$

$$\{\bar{u}\}_2 = \frac{1}{\sqrt{c_2}}\{u\}_2 \Leftrightarrow \{\bar{u}\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.641 \\ -0.746 \end{Bmatrix}$$

$$[\bar{u}]^T [M] [\bar{u}] \{\ddot{\eta}\} + [\bar{u}]^T [K] [\bar{u}] \{\eta\} = [\bar{u}]^T \{F(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{\eta}\}_i + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \{\eta\}_i = N_i(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = N_1(t) \\ \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = N_2(t) \end{cases}$$

$$N(t) = [\bar{u}]_i^T \{F(t)\}$$

$$N_1(t) = \begin{bmatrix} 2.1418 & 0.223 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow N_1(t) = 2.1418\, M_1(t)$$

$$N_2(t) = \begin{bmatrix} 0.641 & -0.746 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow N_2(t) = 0.641\, M_1(t)$$

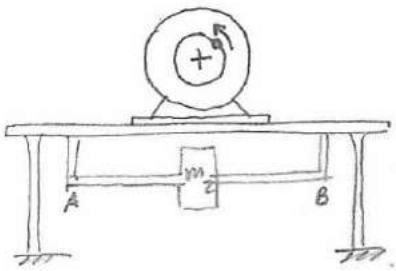
$$\eta_i(t) = \int_0^t F(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad \wedge \quad h(t-\tau) = \frac{1}{m_i \omega_i} \operatorname{sen} \omega_i (t-\tau)$$

recorrendo ao Int. Duhamel

$$\eta_1(t) = \int_0^t N_1(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t N_1(\tau) \frac{1}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 (t-\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{2.1418}{\omega_1^2} \left[t - \frac{1}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \right]$$

$$\eta_2(t) = \frac{0.641}{\omega_2^2} \left[t - \frac{1}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t \right]$$



CONTROLO DE VIBRAÇÕES (CAP. 8)

m_1 (mesa + equipamento) = 350 Kg

ω (equipamento) = 400 rpm = 41.88 rad/s

O sistema, quando em funcionamento, apresenta um nível vibratório elevado que se transmitia ao solo perturbando o bom funcionamento de outros equipamentos da instalação.

A velocidade de funcionamento corresponde à frequência de ressonância do sistema na direcção vertical.

Assim instala-se, para suprimir esta vibração, um redutor de vibrações sintonizado para a frequência de excitação e constituído por uma massa m_2 e por uma barra de secção recta de momento de inércia $I = 2.093 \times 10^{-8}\ m^4$, de módulo de elasticidade $E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa e comprimento $l = 1.52$ m.

Determinar m_2 e as frequências naturais do sistema, considerando A e B apoios simples.

Redutor de vibrações sintonizado para a frequência de excitação

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \omega = \omega_m = \omega_s = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}}$$

$$\omega_s = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}} \Rightarrow \omega_s^2 = \frac{K_2}{m_2} \Leftrightarrow m_2 = \frac{K_2}{\omega_s^2}$$

$$K_2 = \frac{48EI}{l^3} = 58640.56\ N.m$$

$$m_2 = \frac{58640.56}{41.88^2} = 33,42\ Kg$$

Freq. naturais: $\beta^4 - (\alpha^2 + \varepsilon\alpha^2 + 1)\beta^2 + \alpha^2 = 0$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_m} \quad ; \quad \alpha = \frac{\omega_s}{\omega_m} = 1 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{m_2}{m_1} = \frac{33.42}{350} = 0.0955$$

$$\beta^4 - (1 + 0.0955 + 1)\beta^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = 0.85735 \ \vee \ \beta_2 = 1.1664$$

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{\omega_m} \Leftrightarrow \omega_1 = 0,85735 \times 41.88 = 35.91\ rad/s$$

$$\beta_2 = \frac{\omega_2}{\omega_m} \Leftrightarrow \omega_2 = \beta_2 \omega_m = 48.85\ rad/s$$



Fig. 1

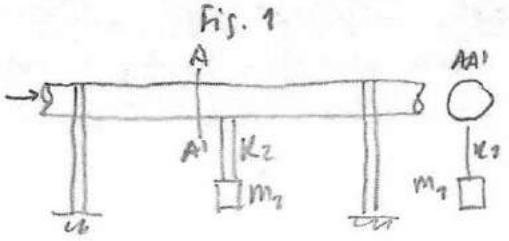


Fig 2

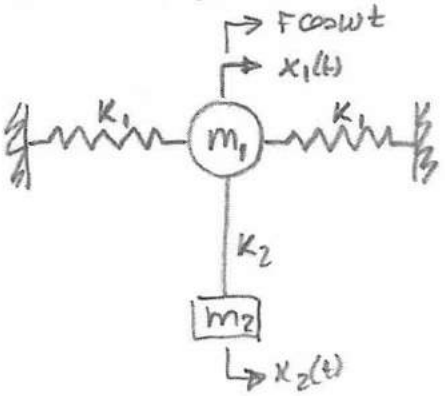


Fig. 3

$\omega_{bomba} = 356 rpm = 37.28 \ rad/s$

$\Downarrow$

as pulsações do fluido enviado para a tubagem coincidem com a frequência natural de vibração lateral da secção da Tubagem

$m_2 = 50 Kg$ (viga encastrada)

a) Energia cinética do sistema

$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} K_1 \cancel{x_1^2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} K_2 \cancel{x_2^2}$

$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

b) Energia potencial

$V = 2 \times \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_1^2 - x_2^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_1 - x_2)^2$

c) Eq. movimento na forma matricial (eq. Lagrange)

$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_1 - x_2)^2$

$q_1 = x_1 \rightarrow \dot{q}_1 = \dot{x}_1 \qquad \bar{Q}_1 = F \cos \omega t$

$q_2 = x_2 \rightarrow \dot{q}_2 = \dot{x}_2 \qquad \bar{Q}_2 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -2 K_1 x_1 - K_2 (x_1 - x_2)$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{x}_1 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$

$\frac{\partial L}{\partial q_2} = + K_2 (x_1 - x_2) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \dot{x}_2 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \bar{Q}_i$

$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + 2K_1 x_1 + K_2 (x_1 - x_2) = F \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - K_2 (x_1 - x_2) \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \cos \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d) K_2?
m_1=? para $\omega_1 = 32.28$ rad/s $\omega_2 > \omega_1$
$\omega_2 = 42.91$ rad/s

$$\beta^4 - (\alpha^2 + \varepsilon\alpha^2 + 1)\beta^2 + \alpha^2 = 0$$

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{\omega_m} = \frac{32,38}{37.28} = 0.8686$$

$$\beta_2 = \frac{\omega_2}{\omega_m} = \frac{42,91}{37,28} = 1.151$$

$$\begin{cases} 0,8686^4 - (\alpha^2 + \varepsilon\alpha^2 + 1) \times 0,8686^2 + \alpha^2 = 0 \\ 1.151^4 - (\alpha^2 + \varepsilon\alpha^2 + 1) 1,151^2 + \alpha^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \varepsilon\alpha^2 + 1 = \dfrac{\alpha^2 + 0,8686^4}{0,8686^2} \\ 1.151^4 - \dfrac{\alpha^2 + 0,8686^4}{0.8686^2} \times 1,151^2 + \alpha^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = 0.08 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1} \Leftrightarrow m_1 = \frac{m_2}{\varepsilon} \Leftrightarrow m_1 = \frac{50}{0.08} = 625\ Kg$$

$$\alpha = \frac{\omega_s}{\omega_m} \Rightarrow \omega_s = \omega_m = 37.28\ rad/s$$

$$\omega_s = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}} \Leftrightarrow \omega_s^2 = \frac{K_2}{m_2} \Rightarrow K_2 = \omega_s^2 m_2 = 37,28^2 \times 50 \Leftrightarrow K_2 = 69489,92$$

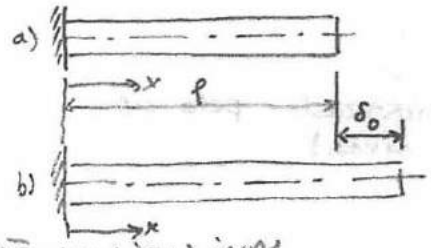
e) m_2? Para $\omega_1 = 26.2$ rad/s
K_2? $\omega_2 = 52.4$ rad/s $\omega_2 >> \omega_1$

$K_2 = 428405$ N/m

$m_2 = 316$ Kg

f) Estando ω_1 e ω_2 + espaçados, obtém-se uma maior gama de amplitudes na qual as frequências têm valores + razoáveis.

SISTEMAS CONTÍNUOS



VIBRAÇÃO LONGITUDINAL
(CAPÍTULO 10)

Fig a) BARRA DE SECÇÃO RECTA e de área A, de comprimento ℓ e de material com densidade ρ e módulo de elasticidade E.

A barra está fixa numa extremidade e livre na outra.

Fig b) Representa a barra descrita à qual é imposto um deslocamento δ_0 na extremidade livre.

a) Frequências naturais de vibração longitudinal da barra.

$$\boxed{c^2 = \frac{E}{\rho}} \qquad \boxed{c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}} \rightarrow \text{EQ. MOVIMENTO}$$

$$\boxed{u(x,t) = U(x) f(t)} \rightarrow \text{RESPOSTA}$$

$$u(x,t) = U(x) f(t) \Rightarrow u(x,t) = \underbrace{\left[A \cos \frac{\omega}{c} x + B \operatorname{sen} \frac{\omega}{c} x\right]}_{U(x)} \underbrace{\left[C \cos \omega t + D \operatorname{sen} \omega t\right]}_{f(t)}$$

Condições Fronteiras:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [A\cos 0 + B \operatorname{sen} 0][C \cos \omega t + D \operatorname{sen} \omega t] = 0 \\ \left[-A \frac{\omega}{c} \operatorname{sen} \frac{\omega}{c}\ell + B \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c}\ell\right] f(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \frac{\omega}{\ell} \cos \frac{\omega}{c} \ell = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \frac{\omega}{c}\ell = (2n-1)\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \omega = \dfrac{(2n-1)\pi c}{2\ell} \end{cases}$$

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2\ell}$$

b) REPRESENTAR as 3 primeiras formas naturais de vibração e indicar os respectivos nodos.

$$U(x) = A \cos \frac{\omega}{c} x + B \operatorname{sen} \frac{\omega}{c} x = B \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}$$

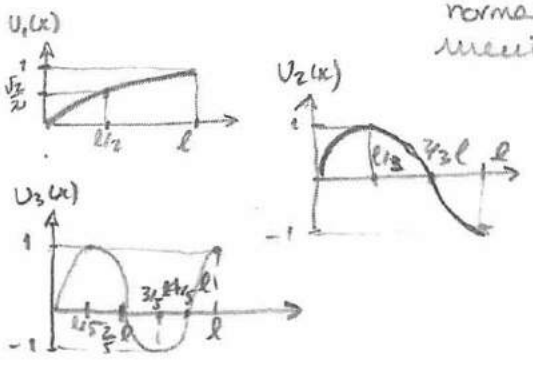
↳ Forma natural normalizada relativamente à amplitude

Fazendo B = 1:

$n = 1 \Rightarrow U_1(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2\ell} x$

$n = 2 \Rightarrow U_2(x) = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2\ell} x$

$n = 3 \Rightarrow U_3(x) = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2\ell} x$



c) Eq. geral de vibração longitudinal livre

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\left[C_n \cos\frac{(2n-1)\pi c}{2l}t + D_n \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi c}{2l}t\right]$$

d) Eq. movimento axial da barra provocado pela aplicação do deslocamento δ_0 (vibração longitudinal livre)

Condições iniciais:

$$\begin{cases} \dfrac{u(x,0)}{x} = \dfrac{\delta_0 x}{l} \Rightarrow u(x,0) = \dfrac{\delta_0 x}{l} \\ \dot{u}(x,0) = \dfrac{du}{dt}(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \dfrac{\delta_0 x}{l} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2l} x = \frac{\delta_0 x}{l} \\ \dot{u}(x,0) = \dfrac{du}{dt}(x,0) \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi c}{2l} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2l} = 0 \end{cases}$$

Recorrendo à ortogonalidade dos senos: $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$

$$\int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\frac{(2n-1)}{2l}\pi x\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2m-1}{2l}\right)\pi x \, dx = \int_0^l \frac{\delta_0}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{2m-1}{2l}\right)\pi x \, dx$$

$n = m$:

$$\frac{l}{2} C_m = \int_0^l \frac{\delta_0 x}{l} \operatorname{sen}\frac{(2m-1)}{2l}\pi x \, dx \Rightarrow$$

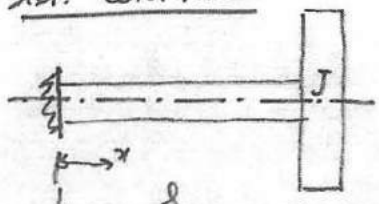
$$\Rightarrow \frac{l}{2} C_n = \int_0^l \frac{\delta_0 x}{l} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)}{2l}\pi x \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n = \frac{8}{\pi^2} \frac{\delta_0 (-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi c}{2l} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2l} = 0 \Rightarrow D_n = 0$$

$$u(x,t) = \frac{8\delta_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \cdot \cos\frac{(2n-1)\pi c}{2l} t$$

SIST. CONTÍNUOS



VIBRAÇÃO DE TORÇÃO DE VEIOS

(CAP. 9)

O veio com momento polar de 2ª ordem I_p, densidade ρ, de módulo de elasticidade transversal G e de comprimento l.

O veio está encastrado numa das extremidades possuindo na outra um volante de momento de inércia axial (xx) J.

a) Equação de pequenas de torção.

$$\theta(x,t) = \theta(x)\, f(t) \qquad c^2 = \frac{G}{\rho}$$

$$\theta(x,t) = \left[A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x \right] [C\cos\omega t + D\sin\omega t]$$

Cond. Fronteiras:

$$\begin{cases} \theta(0,t) = 0 \\ G I_p \dfrac{\partial\theta}{\partial x}(l,t) = -J\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(l,t) \end{cases}$$

$\theta(0,t)=0 \Leftrightarrow A\cos\frac{\omega}{c}\times 0 = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$G I_p \frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t) = -J\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(l,t) \Rightarrow G I_p \left[-A\frac{\omega}{c}\sin\frac{\omega}{c}l + B\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l \right] f(t) =$

$= -J\left[A\cos\frac{\omega}{c}l + B\sin\frac{\omega}{c}l \right][-C\omega^2\cos\omega t - D\omega^2\sin\omega t]$

$\Rightarrow G I_p \left[B\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l \right] f(t) = -JB\sin\frac{\omega}{c}l\,(-C\omega^2\cos\omega t - D\omega^2\sin\omega t)$

$\Rightarrow G I_p \left[B\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l \right][C\cos\omega t + D\sin\omega t) = -JB\sin\frac{\omega}{c}l\,(-\omega^2)(C\cos\omega t + D\sin\omega t)$

$\Leftrightarrow \frac{G I_p}{c}\cos\frac{\omega l}{c} = J\sin\frac{\omega l}{c}\cdot\omega$

Dividindo por $C\cos\frac{\omega l}{c} \Rightarrow \frac{G I_p}{c^2} = \frac{J\omega}{c}\operatorname{tg}\frac{\omega l}{c}$

Multiplicando por l e $c^2 = \frac{G}{\rho}$:

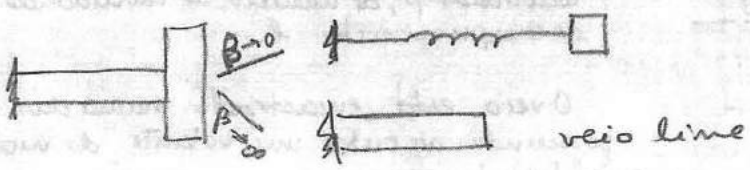
$\frac{G I_p l}{c^2} = \frac{J\omega l}{c}\operatorname{tg}\frac{\omega l}{c} \Leftrightarrow I_p l\rho = J\frac{\omega l}{c}\operatorname{tg}\frac{\omega l}{c}$

$\wedge\ J_v = I_p\rho l \ \wedge\ \frac{J_v}{J} = \beta \Rightarrow \frac{\omega l}{c}\operatorname{tg}\frac{\omega l}{c} = \frac{J_v}{J} \Rightarrow \alpha\operatorname{tg}\alpha = \beta$

b) Duas 1ªs pequenas naturais de vibração para uma razão $\beta = \frac{J_v}{J} = 1$ e $J_v = \rho I_p l$

Para $\beta = \frac{J_v}{J} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\alpha}$

c) Discutir o resultado para $\beta = 0$ e $\beta = \infty$

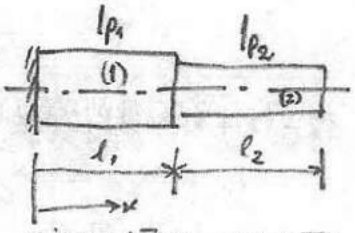


$J_r \geq 0 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{G I_p \ell}{\rho I_p \ell}} = \sqrt{\frac{G I_p \ell}{J_r}} \to \infty$

- $\alpha = \frac{\omega \ell}{c} \to 0$ quando $c \to \infty$
- $\operatorname{tg}\alpha \geq \alpha$ quando $\alpha \to 0$
- $\left(\frac{\omega \ell}{c}\right)^2 = \beta \Rightarrow \omega_L = \sqrt{\frac{G I_p}{J \ell}}$

$\beta \to \infty \Rightarrow \omega_m = \frac{(2m-1)\pi c}{2\ell}$

pois os problemas têm equações formalmente iguais.



VIBRAÇÃO DE TORÇÃO DE VEIOS
(CAP. 9)

O veio está encastrado numa das suas extremidades e livre na outra, é constituído por 2 Troços (1) e (2) de comprimentos l_1 e l_2 e secções retas c/ momentos polares de inércia I_{p_1} e I_{p_2}. O material dos dois troços é o mesmo e possui módulo de elasticidade transversal G e densidade ρ.

a) Eq. de frequências naturais de vibração de torção.

$$\theta_1(x,t) = \Theta_1(x)\, f(t) \quad , 0 \le x_1 \le l_1$$

$$\theta_2(x,t) = \Theta_2(x)\, f(t) \quad , 0 \le x_2 \le l_2$$

$$\Theta_1(x) = A_1 \cos\frac{\omega}{c} x_1 + B_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} x_1$$

$$\Theta_2(x) = A_2 \cos\frac{\omega}{c} x_2 + B_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} x_2$$

→ Condições Fronteiras (PAG 9.5):

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{M_t}{EI}$$

1^a: $x_1 = 0 \Rightarrow \theta_1(0,t) = 0$

2^a: $x_2 = l_2 \Rightarrow \frac{\partial\theta_2}{\partial x}(l_2,t) = 0$

3^a: $\theta_1(l_1,t) = \theta_2(0,t)$

4^a: $\frac{\partial\theta_1}{\partial x}(l_1,t) \times \not{\jmath} I_{p_1} = \frac{\partial\theta_2}{\partial x}(0,t) \times \not{\jmath} I_{p_2}$

1^a: $x_1 = 0 \Rightarrow \theta_1(0,t) = 0 \Rightarrow \Theta_1(0) f(t) = 0 \Rightarrow \Theta_1(0) = 0$

$$\Rightarrow A_1 \cos\frac{\omega}{c}\times 0 + B_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}\times 0 = 0 \Leftrightarrow A_1 = 0$$

2^a: $x_2 = l_2 \Rightarrow \frac{\partial\theta_2}{\partial x}(l_2,t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\omega}{c} A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_2 + \frac{\omega}{c} B_2 \cos\frac{\omega}{c} l_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega}{c} A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_2 = \frac{\omega}{c} B_2 \cos\frac{\omega}{c} l_2$$

3^a: $\theta_1(l_1,t) = \theta_2(0,t) \Leftrightarrow A_1 \cos\frac{\omega}{c} l_1 + B_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_1 = A_2 \cos 0 + B_2 \operatorname{sen} 0$

$$\Leftrightarrow B_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_1 = A_2$$

4^a: $\frac{\partial\theta_1}{\partial x}(l_1,t) \times I_{p_1} = \frac{\partial\theta_2}{\partial x}(0,t) \times I_{p_2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\omega}{c} A_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_1 + \frac{\omega}{c} B_1 \cos\frac{\omega}{c} l_1\right) I_{p_1} = \left(-\frac{\omega}{c} A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} 0 + B_2 \frac{\omega}{c} \cos\frac{\omega}{c} \times 0\right) I_{p_2}$$

$$\Leftrightarrow B_1 \cos\frac{\omega}{c} l_1 I_{p_1} = B_2 I_{p_2}$$

$$\alpha = \frac{I_{p_1}}{I_{p_2}} \Rightarrow \alpha B_1 \cos\frac{\omega}{c} l_1 = B_2$$

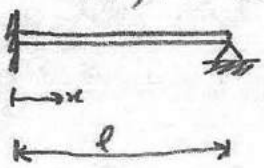
$$\begin{cases} B_2 \cos\frac{\omega}{c} l_2 - A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_2 = 0 \\ B_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_1 - A_2 = 0 \\ \alpha B_1 \cos\frac{\omega}{c} l_1 - B_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_2 & \cos\frac{\omega}{c} l_2 \\ \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_1 & -1 & 0 \\ \alpha\cos\frac{\omega}{c} l_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(sist. homogéneo)

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_2 & \cos\frac{\omega}{c} l_2 \\ \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_1 & -1 & 0 \\ \alpha\cos\frac{\omega}{c} l_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -\operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c} l_2 + \alpha\cos\frac{\omega}{c} l_1 \cos\frac{\omega}{c} l_2 = 0$$

SISTEMAS CONTÍNUOS

VIBRAÇÃO DE FLEXÃO DE VIGAS (CAP. 11)



Viga de comprimento ℓ, de secção recta com área A e momento de inércia I. O material tem módulo de elasticidade E e massa específica ρ.

A viga tem uma extremidade encastrada e a outra simplesmente apoiada.

a) CONDIÇÕES DE FRONTEIRA.

Para $x=0$:

1ª: $w(0,t)=0$

2ª: $\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0$

Para $x=\ell$:

3) $w(\ell,t)=0$

4) $EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\ell,t)=0$

b) EQ. DE FREQUÊNCIAS

$w(x,t)=V(x)f(t)$

$V(x)=A_1\cosh\beta x+A_2\sinh\beta x+A_3\cos\beta x+A_4\sin\beta x$

$f(t)=[C\cos\omega t+D\sin\omega t]$

1) $w(0,t)=0 \Leftrightarrow A_1\cosh\beta 0+A_2\sinh\beta\times 0+A_3\cos\beta\times 0+A_4\sin 0$

$\Leftrightarrow A_1+A_3=0 \Leftrightarrow A_1=-A_3$

2) $\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0 \Leftrightarrow A\beta\sinh\beta\times 0+\beta A_2\cosh\beta\times 0-A_3\beta\sinh\beta\times 0+A_4\beta\cos\beta\times 0=0$

$\Leftrightarrow \beta A_2+A_4\beta=0 \Leftrightarrow A_2=-A_4$

Substituindo:

$V(x)=A_1\cosh\beta x+A_2\sinh\beta x-A_1\cos\beta x-A_2\sin\beta x$

$=A_1(\cosh\beta x-\cos\beta x)+A_2(\sinh\beta x-\sin\beta x)$

3) $w(\ell,t)=0 \Leftrightarrow A_1(\cosh\beta\ell-\cos\beta\ell)+A_2(\sinh\beta\ell-\sin\beta\ell)=0$

4) $EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\ell,t)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}[A_1(\beta\sinh\beta\ell+\beta\sin\beta\ell)+A_2(\beta\cosh\beta\ell-\beta\cos\beta\ell)]$

$\Leftrightarrow A_1(\beta^2\cosh\beta\ell+\beta^2\cos\beta\ell)+A_2(\beta^2\sinh\beta\ell+\beta^2\sin\beta\ell)=0$

$$\begin{cases} A_1(\cosh\beta x-\cos\beta x)+A_2(\sinh\beta x-\sin\beta x)=0 \\ A_1(\beta^2\cosh\beta\ell+\beta^2\cos\beta\ell)+A_2(\beta^2\sinh\beta\ell+\beta^2\sin\beta\ell)=0 \end{cases}$$

$$\det\begin{bmatrix} \cosh\beta l - \cos\beta l & \operatorname{sen}\beta l - \operatorname{sen}\beta l \\ \beta^2\cosh\beta l + \beta^2\cos\beta l & \beta^2\operatorname{sen}\beta l + \beta^2\operatorname{sen}\beta l \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 2\cosh\beta l \operatorname{sen}\beta l - 2\cos\beta l \operatorname{sen}\beta l = 0 \Leftrightarrow \cosh\beta l \operatorname{sen}\beta l - \cos\beta l \operatorname{sen}\beta l = 0$

dividindo por $\cosh\beta l \cos\beta l \Rightarrow \operatorname{tg}\beta l = \operatorname{tgh}\beta l$

c) Duas primeiras frequências naturais de vibração.

$\operatorname{tg}\beta l = \operatorname{tgh}\beta l \Rightarrow \beta_1 l = 3.9266 \quad \beta_2 l = 7.0686$ (PAG. 11.14)

$$\omega = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

$$\omega_1 = (3.9266)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

$$\omega_2 = (7.0686)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

d) EXPRESSÃO DAS FORMAS NATURAIS

DA CONDIÇÃO FRONTEIRA 3) $A_1(\cosh\beta l - \cos\beta l) + A_2(\operatorname{sen}\cosh\beta l + \operatorname{sen}\beta l)$

$$A_{2m} = -A_{1m}\frac{\cosh\beta_m l - \cos\beta_m l}{\operatorname{sen}\cosh\beta_m l - \operatorname{sen}\beta_m l}$$

$$V(x) = A_1(\cosh\beta x - \cos\beta x) + A_2(\operatorname{sen}\cosh\beta x - \operatorname{sen}\beta x)$$

$$V_m(x) = A_{1m}(\cosh\beta_m x - \cos\beta_m x) - A_{1m}\frac{\cosh\beta_m l - \cos\beta_m l}{\operatorname{sen}\cosh\beta_m l - \operatorname{sen}\beta_m l}(\operatorname{sen}\cosh\beta_m x - \operatorname{sen}\beta_m x)$$

↳ Exp. das formas naturais de vibração

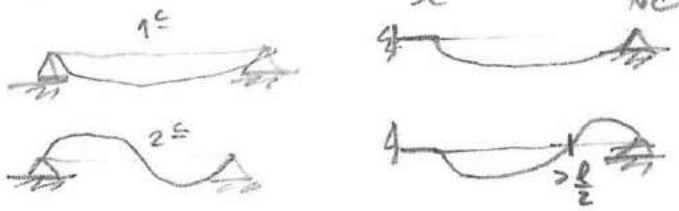
e) Esboçe as duas primeiras formas naturais de vibração

$A_{1m} = 1 \quad \wedge \quad A_{2m} = 1$

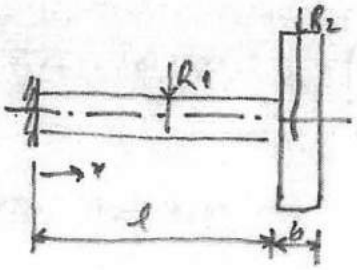
$\beta_1 l = 3.9266 \Leftrightarrow \beta_1 = \frac{3.9266}{l}$

$\beta_2 l = 7.0686 \Leftrightarrow \beta_2 = \frac{7.0686}{l}$

Substituindo em $V_m(x)$ para valores de $x \geq 1$ e dando valores a x, temos



SISTEMAS CONTÍNUOS (MÉTODO DA ENERGIA DE RAYLEIGH) (CAP. 12)



veio de secção reta circular e uniforme de raio R_1, de densidade ρ, de módulo de elast. transversal G, e de comprimento l.

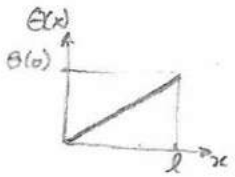
O veio está engastado numa das extremidades permitindo na outra um volante de raio R_2, de densidade ρ e de espessura b.

Pelo método da energia de Rayleigh, e admitindo para a forma fundamental uma deformada $\theta(x)$ linear, estimar a frequência fundamental de vibração de torção nos 2 casos:

a) considerando a massa do veio (ω_a)

PAG. 12.10

$$T_{max} = \omega^2 . T^* \quad \wedge \quad \omega^2 = \frac{U_{max}}{T^*}$$



$$\theta(x) = \phi x = \frac{\theta_0}{l} . x$$

$\theta(0) = 0$ — Condição Fronteira Geométrica

$\theta(x)$ é linear

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l G I_p(x) \left(\frac{d\theta(x)}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l G I_p(x) (\phi)^2 dx = \frac{1}{2} G I_p \phi^2 x \Big|_0^l =$$

$$= \frac{1}{2} G I_p \phi^2 l$$

$$T_{max} = \omega^2 \frac{1}{2} \int_0^l J(x) \theta^2(x) dx$$

$$T_{max} = T_{max_{veio}} + T_{max_{volante}}$$

$$T_{max_{veio}} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l J(x) \theta^2(x) dx = \frac{1}{2} \omega^2 J(x) \phi^2 \int_0^l x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 J(x) \phi^2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{1}{2} \omega^2 J(x) \phi^2 \frac{l^3}{3}$$

No volante $x = l \Rightarrow \theta^2(x) = \theta^2(l)$

$$T_{max_{volante}} = \frac{1}{2} \omega^2 J(x) \int_0^b \phi^2 . l^2 dx = \frac{1}{2} \omega^2 J(x) \phi^2 l^2 x \Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 J(x) \phi^2 l^2 b$$

$$T_{max} = T_{max_{veio}} + T_{max_{volante}} = \frac{1}{2} \omega^2 \phi^2 l^2 \left[J(x) \frac{l}{3} + J(x) b \right]$$

$$T^* = \frac{T_{max}}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{2} \omega^2 \phi^2 l^2 \left[J(x) \frac{l}{3} + J(x) b \right]}{\omega^2}$$

$J(x) . l = J_v$

$J(x) . b = J$

$\theta^2(l) = \phi^2 . l$

$$T^* = \frac{1}{2} \phi^2 l^2 \left[\frac{1}{3} J_v + J \right]$$

$$\omega^2 = \frac{U_{max}}{T^*} \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{\frac{1}{2} G I_p \phi^2 l}{\frac{1}{2} \phi^2 l^2 \left(\frac{1}{3} J_v + J\right)} \Leftrightarrow \omega = \left(\frac{G I_p}{l\left(\frac{1}{3} J_v + J\right)}\right)^{1/2} = 5.307 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

b) Desprezando a massa do veio (ω_b)

$$\omega = \left(\frac{G I_p}{l J}\right)^{1/2} = 5.732 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

c) Frequência fundamental ω_1 exacta

$$\text{tg}\,\alpha_1 = \frac{\beta}{\alpha_1} \quad \text{(de aulas anteriores)}$$

$$\alpha_1 = \frac{\omega_1 \cdot l}{c} \quad ; \quad \beta = \frac{J_v}{J} = 0.5$$

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad ; \quad \text{tg}\,\alpha_1 = \frac{1}{2\alpha_1} \Leftrightarrow \alpha_1 = 0.653$$

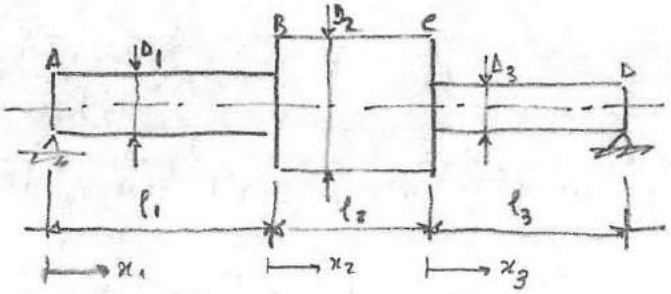
$$\omega_1 = \frac{\alpha_1 \cdot c}{l} \Leftrightarrow \omega_1 = 5.293 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

d) Comparar os resultados da alínea a) e b) e calcular o erro relativo para os valores estimados.

(O método de Rayleigh permite aproximações superiores ao real)

$$\varepsilon_a = \frac{|\omega_a - \omega_1|}{\omega_1} \times 100 = 0.26\% \text{ (muito pequeno)} \Rightarrow \text{Boa aproximação}$$

$$\varepsilon_b = \frac{|\omega_b - \omega_1|}{\omega_1} \times 100 = 8.29\% \Rightarrow \text{A aproximação sugerida não é boa, logo a massa do veio não é desprezável.}$$



Veio simplesmente apoiado.

PELO MÉTODO DA ENERGIA DE RAYLEIGH, estimar a frequência fundamental de vibração lateral do veio (vibração de flexão)

Suposição: admitir um deslocamento horizontal para o trauo BC e deformadas simuladas para os traços AB e CD.

Condições geométricas:

1) $x_1 = 0 \Rightarrow V_1(0) = 0$

2) $x_3 = 0 \Rightarrow V_3(0) = 0$

3) $x_1 = l_1 \wedge x_2 = 0 \Rightarrow V_1(l_1) = V_2(0)$

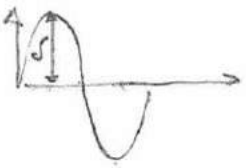
4) $\left.\frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}\right|_{l_1} = \left.\frac{\partial V_2(0)}{\partial x_2}\right|_{l_0}$ $\Longrightarrow$ No ponto B há uma tangente horizontal

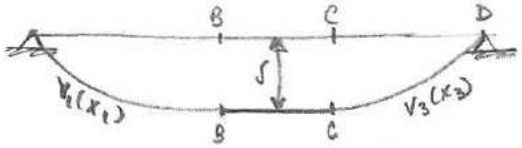
$\Downarrow$ Amplitude δ

$\Downarrow$ $w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4l_1} = \frac{\pi}{2l_1}$

5) $x_2 = l_2 \wedge x_3 = l_3 \Rightarrow V_2(l_2) = V_3(l_3)$

6) $\left.\frac{\partial V_2(x_2)}{\partial x_2}\right|_{l_2} = \left.\frac{\partial V_3(x_3)}{\partial x_3}\right|_{l_3}$





Função possível $V(x) = \begin{cases} V_1(x_1) = \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2l_1} x_1\right) \\ V_2(x_2) = \delta \\ V_3(x_3) = \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2l_3} x_3\right) \end{cases}$

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int_0^{l} EI(x)\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{l_1} EI_1(x)\left(\frac{d^2V_1(x)}{dx_1^2}\right)^2 dx_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} EI_2(x)\left(\frac{d^2V_2(x)}{dx_2^2}\right)^2 dx_2 + \frac{1}{2}\int_0^{l_3} EI_3(x)\left(\frac{d^2V_3(x)}{dx_3^2}\right)^2 dx_3$$

$$= \frac{1}{2}EI_1(x)\int_0^{l_1}\left(\frac{\pi}{2l_1}\right)^4 \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2l_1}\right)x_1\,dx_1 + \frac{1}{2}EI_3(x)\int_0^{l_3}\left(\frac{\pi}{2l_3}\right)^4 \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2l_3}\right)x_3\,dx_3$$

$$= \frac{1}{2}E\delta^2\left[I_1\int_0^{l_1}\left(\frac{\pi}{2l_1}\right)^4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2l_1}\right)x_1\,dx_1 + I_3\int_0^{l_3}\left(\frac{\pi}{2l_3}\right)^4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2l_3}\right)x_3\,dx_3\right]$$

$$= \frac{1}{2}E\delta^2\left[\frac{\pi^4}{32l^3}I_1 + \frac{\pi^4}{32l^3}I_3\right] = \frac{1}{2}E\delta^2\frac{\pi^4}{32}\left[\frac{I_1}{l^3} + \frac{I_3}{l^3}\right]$$

$$T_{max} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^{\ell} \rho A(x) V^2(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^{\ell_1} \rho A_1 (V_1)^2(x)\,dx_1 + \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^{\ell_2} \rho A_2 V_2^2(x)\,dx_2 + \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^{\ell_3} \rho A_3 V_3^2\,dx_3$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \rho \left[\int_0^{\ell_1} A_1 S^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2\ell_1} x_1\right) dx_1 + \int_0^{\ell_2} A_2 S^2\,dx_2 + \int_0^{\ell_3} A_3 S^2 \sec^2 \frac{\pi}{2\ell_3} x_3\,dx_3 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 S^2 \rho \left[A_1 \frac{\ell_1}{2} + A_2 \ell_2 + A_3 \frac{\ell_3}{2} \right] =$$

$$T^* = \frac{T_{max}}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{2}\omega^2 S^2 \rho \left(A_1 \frac{\ell_1}{2} + A_2 \ell_2 + A_3 \frac{\ell_3}{2} \right)}{\omega^2}$$

$$\omega = \left(\frac{U_{max}}{T^*}\right)^{1/2} = \left(\frac{E S^2 \frac{\pi}{32}^4 \left(\frac{1}{\ell_1^3} + \frac{1}{\ell_3^3} \right)}{\frac{1}{2} S^2 \rho \left(A_1 \frac{\ell_1}{2} + A_2 \ell_2 + A_3 \frac{\ell_3}{2} \right)} \right)^{1/2} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}} \left(\frac{E \left(\frac{I_1}{\ell_1^3} + \frac{I_2}{\ell_3^3} \right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + \frac{m_3}{2} \right)} \right)^{1/2}$$

$\therefore \omega = 219.35 \text{ rad/s}$

- Aplicação da 2ª Lei NEWTON:

  • Sistemas em translação

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

  • Sistemas em rotação em torno de um eixo fixo

$$\Sigma M_o = \frac{d}{dt}(H_o)$$

$$\Sigma \Pi_o = J_o \ddot{\theta}$$

- Princípio d'Alembert (Equilíbrio dinâmico)

É o mesmo q a Lei de Newton si pq adicionar-se ao diagrama de corpo livre o efeito de inércia associado ao centro de massa do sistema e o efeito angular, ambos com sentido oposto ao sentido + definido pelas acelerações.

  • Sistemas em translação

$$\Sigma F = 0$$

  • Sist. em rotação em torno de um eixo fixo

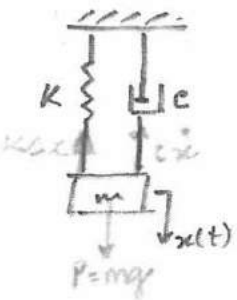
$$\Sigma M_o = 0$$

- Princípio da Conservação da Energia

$$T + U = \text{constante} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T+U) = 0$$

- Equação do movimento

  - Sistema em movimento de translação



$\Sigma F = m\ddot{x}$

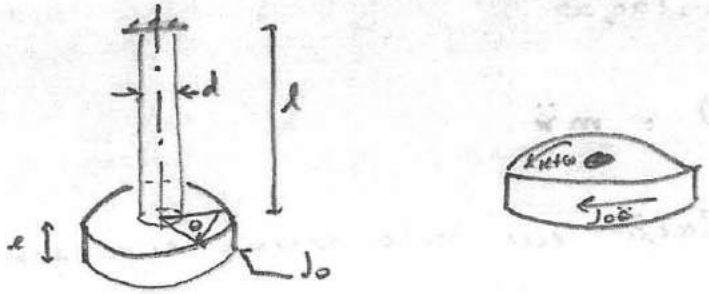
$P - K(\delta + (+x)) - c\dot{x} = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx + K\delta - P = 0$

$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0} \wedge P - K\delta = 0$

As forças de gravidade e/ou os seus momentos são equilibradas pelas forças e/ou momentos produzidos pelos elementos elásticos nessa posição.

- Sistema em movimento de rotação

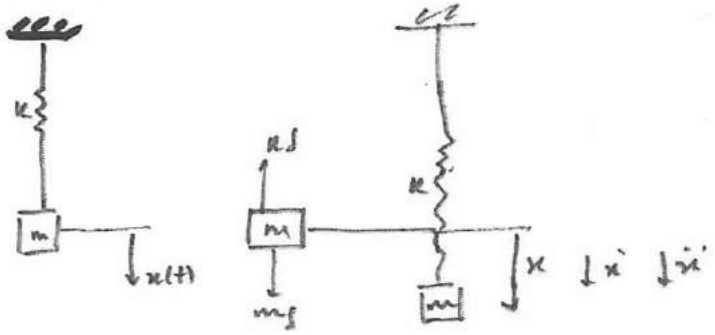


$$K_t = \frac{G I_p \theta}{l} \quad \wedge \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad \wedge \quad J_0 = \rho \pi \frac{D^4 h}{32}$$

$$K_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{G I_p}{l} = \frac{G \pi d^4}{32 l}$$

$$J_0 \ddot{\theta} + K_t \theta = 0$$

- Conservação da Energia



m → massa de translação vertical

$$\text{Energia Cinética} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U_e = \frac{1}{2} k x^2 + mgx \rightarrow \text{variação da energia de deformação}$$

Variação da energia potencial $\Rightarrow U_g = -mgx$

Variação total de energia:

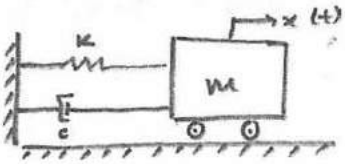
$$U = U_e + U_g = \frac{1}{2} k x^2 + mgx - mgx = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \quad -m\ddot{x} + kx = 0$$

A – SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

1. REGIME LIVRE

1.1. Equação do movimento



$$\boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0} \quad (1)$$

Condições iniciais : $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= Ce^{st} \\ \dot{x}(t) &= sCe^{st} \\ \ddot{x}(t) &= s^2 Ce^{st} \end{aligned}\right\} \text{ substituindo em (1):}$$

$$(ms^2 + cs + k)Ce^{st} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ms^2 + cs + k = 0}$$

↑ eq. característica da eq. diferencial do movimento

Soluções independentes para a eq. do movimento:

$$x_1(t) = C_1 e^{s_1 t} \qquad x_2(t) = C_2 e^{s_2 t}$$

Solução para a eq. do movimento

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

onde C_1 e C_2 determinam-se através das condições iniciais do sistema

1.2. Amortecimento crítico (c_c)

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \Leftrightarrow c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

$$\boxed{c_c = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}}$$

$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ → frequência angular de vibração não amortecida

1.3. Razão de amortecimento (ξ)

$$\boxed{\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}}$$

$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega_n$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \overset{(/m)}{\Leftrightarrow} \ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$$

2. SISTEMA NÃO-AMORTECIDO : $\xi = 0$; $\sqrt{\xi^2 - 1} < 0$

2.1. Raizes da eq. característica ($ms^2 + cs + k = 0$)

$$ms^2 + cs + k = 0 \Leftrightarrow s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\begin{cases} \frac{c}{m} = 2\xi\omega_n \\ \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \Rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \left(\sqrt{\xi^2 - 1}\right).\omega_n$$

$$\begin{cases} \xi = 0 \\ \sqrt{\xi^2 - 1} \in \mathbb{C} \end{cases} \Rightarrow s_{1,2} = -\underbrace{\xi\omega_n}_{0} \pm \sqrt{\underbrace{\xi^2}_{0}\omega_n^2 - \omega_n^2} \quad \Leftrightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm j\omega_n$$

onde $j = \sqrt{-1}$

2.2. Resposta natural

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$
$$= C_1 e^{j\omega_n t} + C_2 e^{-j\omega_n t}$$

$e^{\pm j\alpha t} = \cos\alpha t \pm j \sin\alpha t$

$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t$

$\dot{x}(t) = -\omega_n A_1 \sin\omega_n t + \omega_n A_2 \cos\omega_n t$

$x(t=0) = A_1 = x_0$

$\dot{x}(t=0) = \omega_n A_2 = v_0 \Leftrightarrow A_2 = \frac{v_0}{\omega_n}$

$$x(t) = x_0 \cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin\omega_n t$$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = tg^{-1}\left(\frac{v_0}{x_0\omega_n}\right)$$

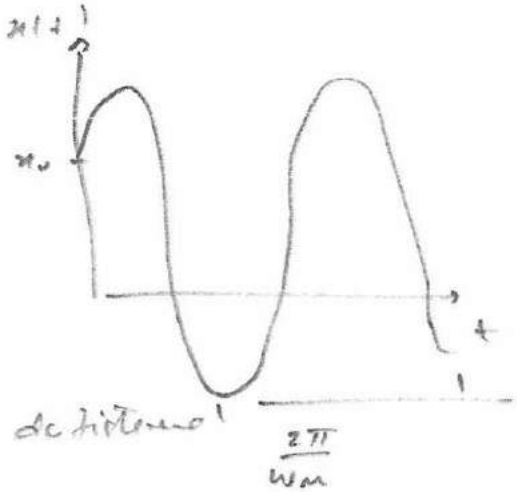
ou

$$x(t) = x_0 \cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin\omega_n t$$
$$= A\sin(\omega_n t + \psi)$$

onde

$$A_0 = A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\psi = tg^{-1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = tg^{-1}\left(\frac{x_0\omega_n}{v_0}\right)$$



ω_n → frequência natural de vibração do sistema

A → amplitude do movimento

ϕ → κ de fase

3. Sistema <u>SUB-AMORTECIDO</u> : $\xi < 1$; $c < c_c$ ⇔ ; $\sqrt{\xi^2 - 1} < 0$; $\sqrt{\frac{k}{m}} > \frac{c}{2m}$

$\Downarrow$

$\omega_n > \xi \omega_n$

3.1. Raízes da eq. característica

$$ms^2 + cs + k = 0 \Leftrightarrow s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

3.2. Resposta natural

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

$$= C_1 e^{(-\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t} + C_2 e^{(-\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t}$$

$$= e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1 e^{(j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t} + C_2 e^{(-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t}\right)$$

$$= e^{-\xi\omega_n t}\left[(C_1+C_2)\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t) + j(C_1-C_2)\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t)\right]$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[A_1\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t) + A_2\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t)\right]}$$

Condições iniciais: $x(t=0) = x_0$ $\quad$ $\dot{x}(t=0) = v_0$

$A_1 = x_0$ $\quad$ $A_2 = \dfrac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

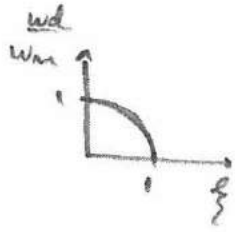
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}\frac{A_2}{A_1}$$

$t \to \infty$: $e^{-\xi\omega_n t} \to 0$ $\therefore x(t) \to 0$

Elipse

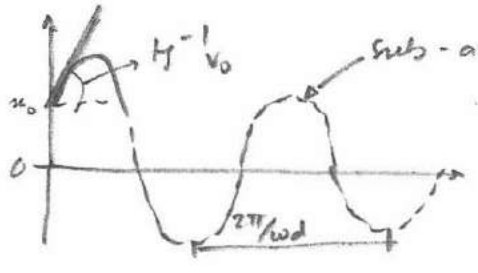
$$\boxed{\left(\frac{\omega_d}{\omega_n}\right)^2 + \xi^2 = 1}$$



$$\boxed{\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$ → pepiência angular de vibração amortecida. (constante)

$\omega_d < \omega_n$

A resposta atenua-se no tempo pois quando $t \to \infty$, $x(t) \to 0$



4. Sistema criticamente amortecido: $\zeta = 1$; $c = c_c$; $\sqrt{\zeta^2 - 1} = 0$

4.1. Raizes da eq. característica

$$ms^2 + cs + k = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{c_c}{2m} = -\omega_n$$

4.2. Resposta natural

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A_1 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right) + A_2 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)\right]$$
$$= e^{-\zeta\omega_n t}\left[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right]$$

$\zeta \to 1$: $\omega_d \to 0$ $\therefore$ $A_1 \cos(\omega_d t) \to A_1$ e $A_2 \sin(\omega_d t) \to A_2\omega_d t$

Para $\zeta = 1$:

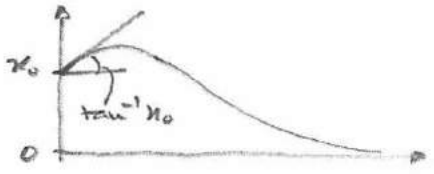
$$x(t) = [A_1 + A_2\omega_d t]\, e^{-\omega_n t} = e^{-\omega_n t}[A_1 + A_2 t]$$

$x(t=0) = x_0 \Rightarrow A_1 = x_0$ $\qquad$ $\dot{x}(t=0) = v_0 \Rightarrow A_2 = v_0 + \omega_n x_0$

$$\boxed{x(t) = [x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t]\, e^{-\omega_n t}}$$

• O movimento $x(t)$ é não oscilatório

$t \to \infty$: $e^{-\omega_n t} \to 0$ $\therefore$ $x(t) \to 0$



5. Sistema sobre-amortecido : $\zeta > 1$; $c > c_c$; $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$

5.1. Raízes da eq. característica

$$m s^2 + cs + k = 0 \Leftrightarrow s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$$

onde $s_2 < s_1$

5.2. Resposta natural

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ A_1 \cosh\left[(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})\, t \right] + A_2 \sinh\left[(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})\, t \right] \right\}$$

$x(t=0) = x_0$

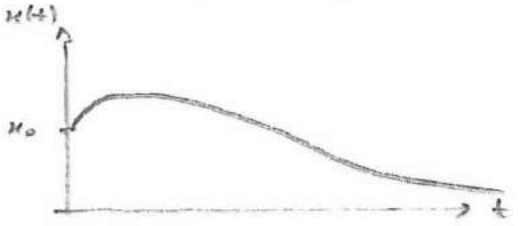
$$A_1 = \frac{x_0 \omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) + v_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$\dot{x}(t=0) = v_0$

$$A_2 = \frac{-x_0 \omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) - v_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

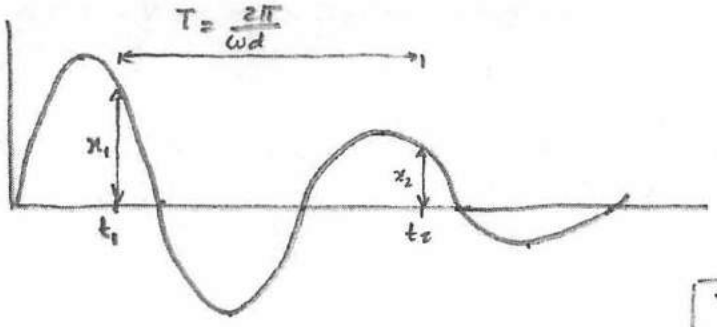
- O movimento $x(t)$ é não oscilatório e decresce exponencialmente com o tempo

$t \to \infty : e^{-\omega_n t} \to 0 \therefore x(t) \to 0$



7. DECREMENTO LOGARÍTMICO (δ)

↓ representa a taxa de diminuição da amplitude de vibração livre amortecida



$x(t_1) = x_1$

$x(t_2 = t_1 + T) = x_2$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{A e^{-\xi\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)}{A e^{-\xi\omega_n(t_1+T)}\cos(\omega_d(t_1+T) - \phi)} \Leftrightarrow \ldots$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = e^{\xi\omega_n T}$$

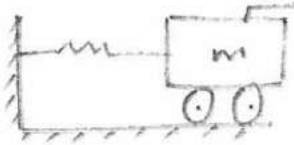
$$\delta = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \xi\omega_n T = \frac{2\pi\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

---

8. PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

8.1. Método da Energia de Rayleigh



É bom para sistemas c/ vários corpos c/ movimento relativo e para sistemas c/ molas distribuídas ou elementos elásticos que não devam ser considerados

Conservação da energia: $T+U = C^{te} \therefore T_1 + U_1 = T_2 + U_2$

$$T_1 + 0 = T_2 + 0 + U_2$$

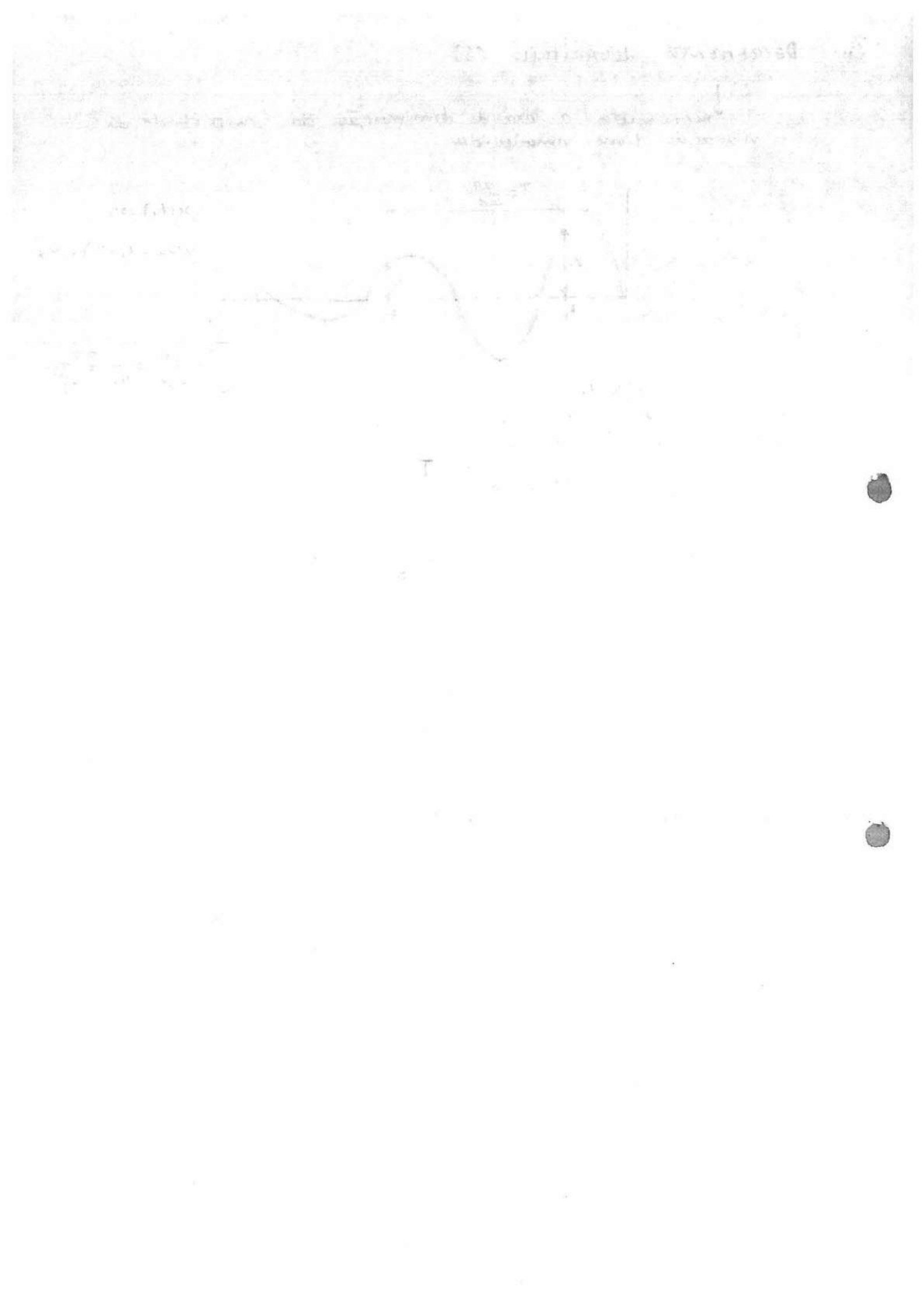
$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)$$

$T_{max} = U_{max}$

$$T_{max} = \frac{1}{2}m(\dot{x}(t)_{max}) = \frac{1}{2}m\omega_n^2 A^2$$

$$U_{max} = \frac{1}{2}k(x(t)_{max})^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{1}{2}m\omega_n^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



9. Exemplo

9.1. Sistema em movimento de rotação

Eq. movimento:

$$J_0 \ddot{\theta} + K_t \theta = 0$$

$$K_t = \frac{Mt}{\theta} = \frac{GI_p}{\ell} = \frac{G\pi d^4}{32\ell}$$

$$J_0 = \frac{\rho \pi D^4 h}{32}$$

Cond. iniciais

$$\theta(t=0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$$

Frequência natural: $\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{J_0}}$

Resposta natural:

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

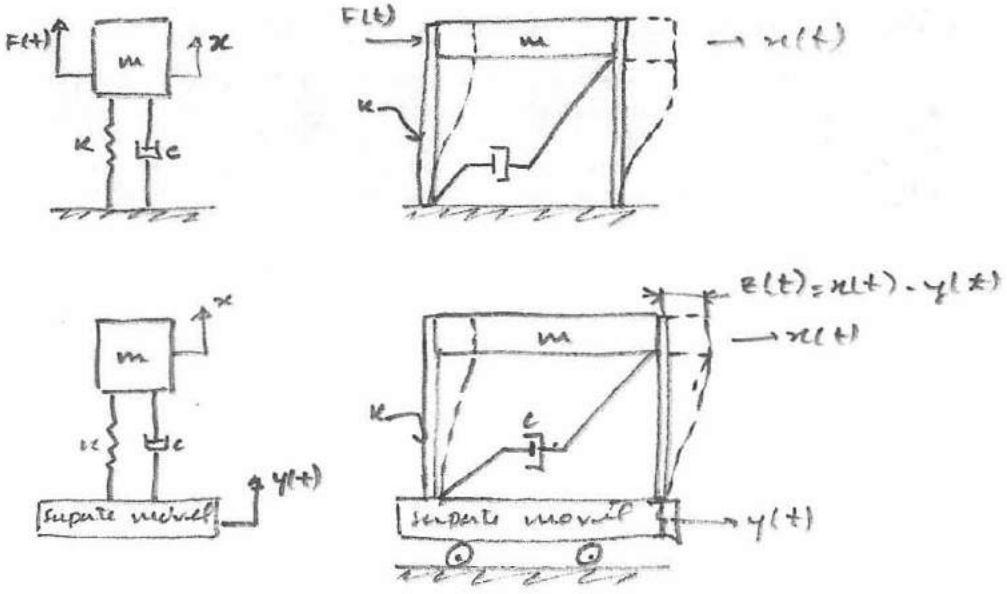
$$A_1 = \theta_0$$

$$A_2 = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

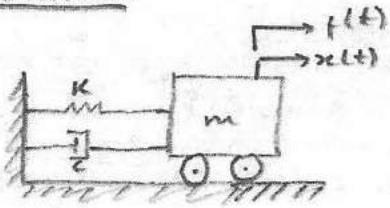
REGIME FORÇADO HARMÓNICO

- Forças dinâmicas $f(t)$: transmissão activa
- movimento dos apoios $y(t)$: transmissão passiva



1. Regime harmónico

1.1. Sist. Amortecido



$f(t) = F\cos\omega t$

F: amplitude da excitação

ω: frequência de variação harmónica

Equação do movimento:

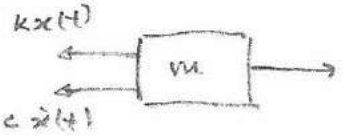
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F\cos\omega t$$

Solução geral:

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ ← solução particular da eq.

- $x_h(t)$ → sol. da equação homogénea → vibração livre ou natural → decai com o tempo → componente transitória
- $x_p(t)$ → vibração devida à excitação exterior → mantém-se enquanto se mantiver a excitação → componente permanente ou estacionária

A taxa de decrescimento depende dos parâmetros do sistema: m, K e c.



1.1.1. Eq. diferencial do movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F\cos(\omega t)$$

1.1.2. Resposta transitória

Para a eq. diferencial homogénea

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

$$x_h(t) = e^{-\{\omega_n t}\,[A_1\cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t]$$

1.1.3 Resposta estacionária ou permanente

$$x_p(t) = B_1\cos\omega t + B_2 \sin\omega t$$

$\dot{x}_p(t) = -\omega B_1 \sin\omega t + \omega B_2 \cos\omega t$

$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 B_1 \cos\omega t - \omega^2 B_2 \sin\omega t$

Substituindo na eq. diferencial do movimento e identificando os termos:

$$x_p(t) = \frac{F(k-\omega^2 m)}{(k-\omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}\cos\omega t + \frac{F(\omega c)}{(k-\omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}\sin\omega t$$

Dividindo o numerador e denominador por

$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$

$\frac{c}{k} = \frac{2\xi}{\omega_n}$

$$\boxed{\beta = \frac{\omega}{\omega_n}}$$

↳ razão de frequência

ω: frequência de excitação

ω_n: " natural não amortecida

$$\boxed{X_s = \frac{F}{k}}$$ → Deslocamento estático

↳ deslocamento da mola se devido a uma força estática de grandeza F

$$\boxed{x_p(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \phi)}$$

↳ resposta permanente

↓

tipo harmônico de amplitude $X(\omega)$ e de frequência ω

$$\boxed{X(\omega) = \frac{X_s}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}}$$

↳ é função da frequência de vibração

Ângulo de fase ϕ:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B_2}{B_1} = \tan^{-1}\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)}$$

1.1.3.1. Factor de ampliação dinâmica (μ)

↓

Razão entre a amplitude dinâmica e o deslocamento estático.

$$\boxed{\mu = \frac{X(\omega)}{X_s}}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\boxed{x_p(t) = X_s \mu . \cos(\omega t - \phi)} \rightarrow \text{resposta permanente}$$

1.1.4. RESPOSTA TOTAL

$$x(t) = \cancel{X_s} \; e^{-\xi\omega_n t} \left[A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right] + \frac{F}{K} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left[(1-\beta^2)\cos\omega t + 2\xi\beta \sin\omega t\right]$$

1.1.5 FACTOR DE AMPLIFICAÇÃO

CARACTERÍSTICAS DA RESPOSTA PERMANENTE

1.1.5.1. Factor de amplificação dinâmica

$$\frac{\partial \mu(\beta, \xi)}{\partial \beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta\left[\beta^2 + 2\xi^2 - 1\right]}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{3/2}} = 0$$

- $\beta = 0$: representa a aplicação estática de uma força de grandeza F e o deslocamento imposto ao sistema é o deslocamento estático X_s.
- $\beta = \infty$: o factor de amplificação dinâmica tende para zero, e em consequência, a amplitude tende igualmente para zero. ($\omega >>> \omega_n$). Este caso corresponde ao mínimo absoluto de cada curva
- $\beta^2 + 2\xi^2 - 1 = 0$: factor de amplificação dinâmica máximo para $\beta = \sqrt{1-2\xi^2}$ desde que $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$
- O valor máximo de μ para $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ obtém-se para substituição de β na expressão do factor de amplificação dinâmica e é igual a : $\mu_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}}$

- O factor de amplificação dinâmica máximo $\mu_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ ocorre para uma frequência $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$ designada por <u>frequência de ressonância de amplitude</u> e que verifica a relação $\omega_R < \omega_d < \omega_n$

- Para $\beta = 1$, ou $\omega = \omega_n$, o factor de amplificação dinâmica é igual a $\mu = \frac{1}{2\xi}$, verificando-se que é inversamente proporcional à razão de amortecimento.

- O amortecimento reduz o factor de amplificação dinâmica e a redução é mais significativa na vizinhança de $\beta = 1$

- Para $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$, o gráfico de μ não apresenta "picos" e o valor máximo de μ é igual à unidade para $\omega = 0$.

- Para $\xi = 0$, sistema não-amortecido, existe uma descontinuidade para $\beta = 1$

1.1.5.2. <u>ÂNGULO DE FASE</u>

- **Independentemente** do valor da razão de amortecimento ξ, a resposta e a excitação estão:
  - em fase, $\phi = 0$, se $\beta = 0$ ($\omega = 0$)
  - em quadratura de fase, $\phi = \frac{\pi}{2}$, se $\beta = 1$ ($\omega = \omega_n$)
  - em oposição de fase, $\phi = \pi$, se $\beta \to \infty$ ($\omega \gg \omega_n$)
- O sistema está em ressonância de fase se $\phi = \frac{\pi}{2}$, para $\beta = 1$ ($\omega = \omega_n$), e a resposta está em quadratura com a excitação.
- O ângulo de fase depende dos parâmetros do sistema m, c e k e da frequência de excitação ω.
- O ângulo de fase é pequeno para pequenos valores de β. Para valores de β elevados, o ϕ de fase tende para π de forma assimptótica.

- Para um sistema não-amortecido, $\xi = 0$, o ϕ de fase é igual a zero, para $\beta < 1$, ou igual a π para $\beta > 1$

- Abaixo da ressonância de fase, $\beta < 1$, o ϕ de fase aumenta com o amortecimento, enquanto que para $\beta > 1$, o ϕ de fase diminui c/ o amortecimento.

- Todas as curvas passam por $\phi = \frac{\pi}{2}$ para $\beta = 1$ sendo $\omega = \omega_n$ designada por <u>frequência de ressonância de fase</u>

1.1.5.3. RESPOSTA PARA $\beta = 1$

Para $\beta = 1$ ($\omega = \omega_n$) - e para $\xi << 1$ vem $\frac{\omega}{\omega_d} \cong 1$ e $\omega_d \cong \omega_n$ pelo que

A resposta ($x(t)$) aumenta gradualmente com o tempo e tende assimptoticamente para o valor limite $\frac{F}{k} \frac{1}{2\xi}$.

O nº de ciclos necessários para que a resposta com $\beta = 1$ atinja a amplitude estacionária $\frac{F}{k} \frac{1}{2\xi}$ depende do valor do amortecimento

---

1.1.6. REPRESENTAÇÃO VECTORIAL

Em regime permanente, a resposta estacionária é:

$$x(t) = X(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

A eq. do movimento : $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) - F\cos\omega t = 0$

exprime que a soma das forças actuantes sobre a massa é nula:

$$f_i(t) + f_c(t) + f_k(t) - f(t) = 0$$

- $f_i(t)$: <u>força de inércia</u>, em oposição de fase em relação ao deslocamento

$$f_i(t) = m\ddot{x}(t) = -\omega^2 m X(\omega) \cos(\omega t - \phi) = -\omega^2 m X(\omega) \cos(\omega t - \phi + \pi)$$

- $f_c(t)$: <u>força de amortecimento</u>, em avanço de fase $\frac{\pi}{2}$ (quadratura) sobre o deslocamento.

$$f_c(t) = c\dot{x}(t) = -\omega c X(\omega) \sin(\omega t - \phi) = -\omega c X(\omega) \cos(\omega t - \phi + \tfrac{\pi}{2})$$

- $f_k(t)$: <u>força elástica</u>, em fase c/ o deslocamento

$$f_k(t) = kx(t) = kX(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

• $f(t)$: ~~força exterior~~, em avanço de fase ϕ em relação ao deslocamento.

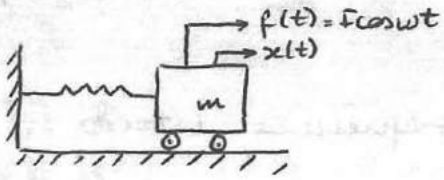
$$f(t) = F \operatorname{sen} \omega t$$

Estas forças, de tipo harmónico com frequência ω, são iguais às projecções sobre um eixo de vectores em rotação c/ a mesma velocidade angular constante ω.

$$\phi = tg^{-1} \frac{\omega c}{\kappa - \omega^2 m}$$

—h—

1.2. SISTEMA NÃO AMORTECIDO



1.2.1. Eq. do movimento

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + kx(t) = F\cos\omega t}$$

1.2.2. RESPOSTA TRANSITÓRIA

$$x_h(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.2.3. RESPOSTA ESTACIONÁRIA OU PERMANENTE

$$c = 0 \therefore \xi = 0$$

$$X(\omega) = \frac{X_s}{|1-\beta^2|}$$

$$\mu = \frac{X(\omega)}{X_s} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

$\phi = 0$ para $\beta < 1$ $(\omega < \omega_n)$ $\qquad$ $\phi = \pi$ para $\beta > 1$ $(\omega > \omega_n)$

$$x_p(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \phi) = \frac{X_s}{|1-\beta^2|}\cos(\omega t - \phi)$$

1.2.4 Resposta total : $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t + \frac{X_s}{|1-\beta^2|}\cos(\omega t - \phi)$$

Admitindo as condições iniciais:

$$x(t=0) = x_0 \quad \wedge \quad \dot{x}(t=0) = v_0$$

$$A_1 = x_0 - X_s \times \frac{1}{|1-\beta^2|}\cos\phi \quad \wedge \quad A_2 = \frac{v_0}{\omega_n}$$

$$x(t) = \left[x_0 - X_s \frac{1}{|1-\beta^2|} \cos\phi\right] \cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin\omega_n t + X_s \frac{1}{|1-\beta^2|} \cos(\omega t - \phi)$$

Dependendo do valor da razão de frequência temos:

- $0 < \beta < 1 \quad (\omega < \omega_n)$
- $\beta > 1 \quad (\omega > \omega_n)$
- $\beta = 1 \quad (\omega = \omega_n)$

1.2.5. BATIMENTO

Este fenómeno ocorre para uma frequência de excitação ω próxima da frequência natural ω_n do sistema.

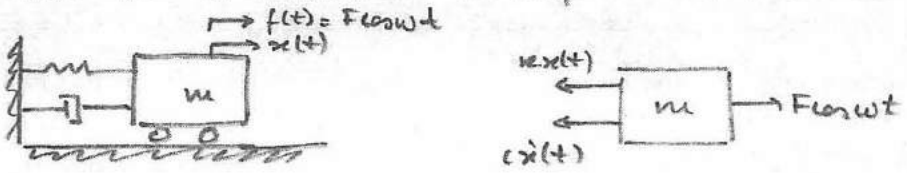
Neste tipo de vibração a amplitude aumenta e diminui de uma forma regular.

T_b = Período de batimento = Intervalo de tempo entre partes de amplitude nula ou de amplitude máxima

$$T_b = \frac{2\pi}{2\varepsilon} = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega}$$

1.3. TRANSMISSIBILIDADE DE FORÇA

As forças geradas pela vibração de um sistema mecânico transmitem-se à estrutura de suporte do sistema



A força $f_T(t)$ transmitida ao suporte do sistema é igual a:

$$f_T = kx(t) + c\dot{x}(t)$$

introduzindo $x(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \phi)$ com $\phi = \tan^{-1}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$

$$f_T(t) = kX(\omega)\cos(\omega t - \phi) - \omega c X(\omega)\sin(\omega t - \phi)$$

$$\Downarrow$$

$$f_T(t) = F_T\cos(\omega t - \psi)$$

(F_T: amplitude)

força transmitida ao suporte é, uma força harmónica de frequência ω e amplitude F_T

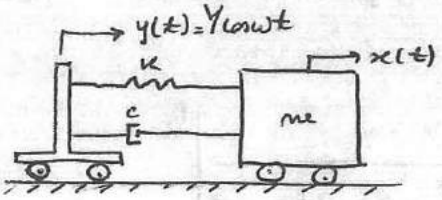
$$F_T = F \cdot \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

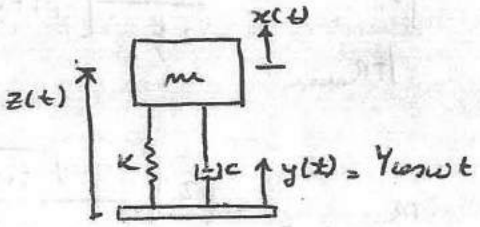
A transmissão de força ao suporte (TR) é representada pela razão entre a amplitude F da solicitação aplicada e a amplitude F_T da força transmitida e designa-se p/ TRANSMISSIBILI

$$\rightarrow \quad T_R = \frac{F_T}{F} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

- $\beta \equiv 1 \therefore TR > 1 \therefore F_T > F$
- $\beta = \sqrt{2} \therefore TR = 1 \ (\forall \xi)$
- $\beta \to \infty \therefore TR \to 0$
- Para $\beta > \sqrt{2}$ ($\omega > \sqrt{2}\omega_n$), a transmissibilidade diminui à medida ξ o amortecimento diminui
- Isolamento de vibração, $TR < 1$, sse $\beta > \sqrt{2}$ / $\omega > \sqrt{2}\omega_n$ / independente do amortecimento

1.4. MOVIMENTO HARMÓNICO DA BASE





- $y(t) = Y \cos \omega t$ → deslocamento da base
- $x(t)$ → deslocamento da massa m a partir da sua posição de equilíbrio estático
- $x(t) - y(t)$ → elongação da mola
- $\dot{x}(t) - \dot{y}(t)$ → velocidade relativa entre as duas extremidades do amortecedor

1.4.1. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

$$-k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y}) = m\ddot{x} \quad \therefore \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$$

Para $y(t) = Y \cos \omega t$:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY\cos\omega t - c\omega Y \sin\omega t$$

$$= Y\sqrt{k^2+(\omega c)^2}\,\cos(\omega t + \gamma) \quad \wedge \quad \gamma = \operatorname{tg}^{-1}\frac{\omega c}{k} = \operatorname{tg}^{-1} 2\xi\beta$$

1.4.2. RESPOSTA ESTACIONÁRIA OU PERMANENTE

$$\boxed{x(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \psi)}$$

$$X(\omega) = Y\frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \quad \wedge \quad \psi = \operatorname{tg}^{-1}\frac{2\xi\beta^3}{1-\beta^2+(2\xi\beta)^2}$$

1.4.3. TRANSMISSIBILIDADE DO DESLOCAMENTO (TR)

$$TR = \frac{X(\omega)}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$ ↳ transmissão de deslocamento da base para a massa.

$X(\omega)$ → amplitude do movimento da massa

Y → amplitude do movimento da base

$$\beta_{|TR_{max}} = \frac{1}{2\zeta}\left[\sqrt{1+8\zeta^2} - 1\right]^{1/2}$$

$$TR_{max} = 4\zeta^2\left[\frac{\sqrt{1+8\zeta^2}}{2+16\zeta^2+(16\zeta^4-8\zeta^2-2)\sqrt{1+8\zeta^2}}\right]^{1/2}$$

1.4.4. Movimento Relativo

Deslocamento da massa em relação à base: $z(t) = x(t) - y(t)$

1.4.4.1. Eq. movimento

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{y}(t)$$
$$= m\omega^2 Y\cos(\omega t)$$

1.4.4.2. Resposta estacionária ou permanente

$$\boxed{z(t) = Z(\omega)\cos(\omega t - \phi)}$$

$$Z(\omega) = Y\frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)+(2\zeta\beta)^2}} \rightarrow \text{amplitude do mov. relativo}$$

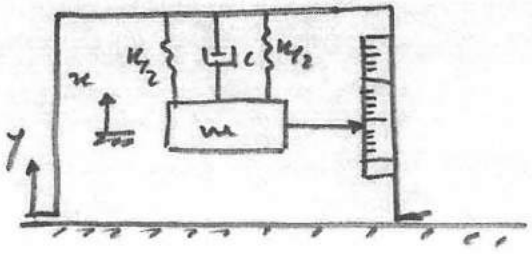
$$\phi = tg^{-1}\frac{\omega c}{k-\omega^2 m} = tg^{-1}\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

1.4.4.3 Transmissibilidade relativa

$$\boxed{TR_R = \frac{Z(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)+(2\zeta\beta)^2}}}$$

$Y \rightarrow$ amplitude do movimento $y(t)$ da base.

2 - TRANSDUTORES DE VIBRAÇÃO



Um transdutor de vibrações é constituído por:

uma massa m suportada por uma mola de constante de rigidez k e por um amortecedor de constante viscosa c alojados dentro de uma caixa fixada ao corpo em vibração.

- $x(t)$ → deslocamento absoluto da massa m
- $y(t)$ → " " da caixa e da estrutura: $y(t) = Y\cos\omega t$
- $z(t)$ → $z(t) = x(t) - y(t)$ → deslocamento da massa em relação à caixa

Eq. do movimento da massa:

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{y}(t) = m\omega^2 Y\cos\omega t$$

$$z(t) = Z(\omega)\cos(\omega t - \phi)$$

2.1. TRANSMISSIBILIDADE DO MOVIMENTO RELATIVO

$$TR_R = \frac{Z}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

- Para $\beta > 3$ $\therefore TR_R \cong 1$ $\therefore Z \cong Y$

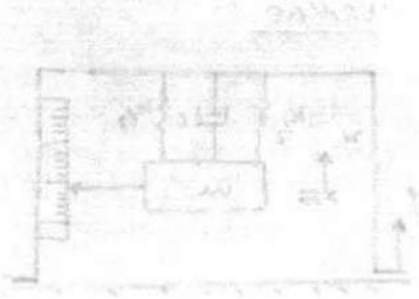
$$y(t) = Y\cos(\omega t) \Rightarrow z(t) = Y\cos(\omega t - \phi)$$

- $TR_R = 1$ $\therefore \beta \uparrow$ $\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \ll \omega$ $\therefore m \uparrow$ e $k \downarrow$
- $TR_R \neq 1$ $\therefore Z \neq Y$ $\therefore Y = \frac{Z}{TR_R}$

* Vibrómetro: transdutor de baixa frequência ($\omega_n \ll \omega$)

2.2. ACELERÓMETRO

$$TR_R = \frac{Z}{Y}$$
$$\vdots$$



REGIME PERIÓDICO

Eq. movimento:

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)}$$

$$x(t=0) = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = \dot{x}_0$$

A solicitação periódica $f(t) = f(t + nT)$ de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ pode expandir-se em série de Fourier:

$$\boxed{f(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos(p\omega t) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin(p\omega t)}$$

Eq. do movimento para uma solicitação periódica $f(t)$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{F_p \cos(p\omega t - \psi_p)}_{\text{funções harmónicas}}$$

Pelo princípio da sobreposição, aplicado a sistemas lineares, determina-se a resposta do sistema sobrepondo as respostas individuais a cada uma das harmónicas da expansão da excitação periódica.

$$m\ddot{x}_0(t) + c\dot{x}_0(t) + kx_0(t) = \frac{F_0}{2}$$

$$m\ddot{x}_1(t) + c\dot{x}_1(t) + kx_1(t) = F_1 \cos(\omega t - \psi_1)$$

$$m\ddot{x}_2(t) + c\dot{x}_2(t) + kx_2(t) = F_2 \cos(2\omega t - \psi_2)$$

$$\vdots$$

$$m\ddot{x}_p(t) + c\dot{x}_p(t) + kx_p(t) = F_p \cos(p\omega t - \psi_p)$$

Para o termo constante $\frac{F_0}{2}$ vem:

$$x_0(t) = \frac{I_0}{2k}$$

Utilizando a solução estabelecida para o regime harmónico permanente, a solução particular:

$$x_p(t) = \frac{F_p}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_p^2)^2 + (2\xi\beta_p)^2}} \cos(p\omega t - \phi_p - \psi_p)$$

$$\beta_p = \frac{p\omega}{\omega_n} = p\frac{\omega}{\omega_n} = p\beta$$

↳ Razão de frequência

$$\psi_p = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi\beta_p}{1-\beta^2 p}$$

↳ ângulo de fase

$$x(t) = \frac{F_0}{2K} + \sum_{p=1}^{\infty} X_p(\omega) \cos(p\omega t - \psi_p - \phi_p)$$

↳ resposta estacionária

↓

~~Uma~~ função periódica com o mesmo período de $f(t)$

⇓

Regime estacionário periódico

- A amplitude $X_p(\omega)$ e o desfasamento ϕ_p de cada harmónica dependem da ordem p.

$$X_{sp} = \frac{F_p}{K}$$

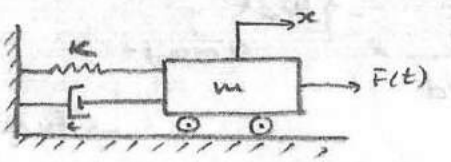
↳ deslocamento estático

$$\mu_p = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_p^2)^2 + (2\xi\beta_p)^2}}$$

↳ factor de amplificação dinâmica

- a amplitude X_p diminui na razão inversa do quadrado da ordem p: $\frac{1}{p^2}$
- $\omega_{ra} = p\omega \therefore X_p(\omega) \uparrow$: ressonância de amplitude
- o desfasamento $\phi_p \longrightarrow \pi$

REGIME TRANSIENTE



1. Regime transiente

1.1. Impulso

Força impulsiva: $(f(t))$ de grandeza elevada e que actua durante um intervalo de tempo Δt muito curto.
Actua em $t = a$ para produzir um impulso linear F^*.

$$f(t) = F^* \delta(t-a)$$

Impulso: integral no tempo de uma força impulsiva [Ns]

$$F^* = \int_t^{t+\Delta t} f(t)\, dt$$

- F^* definido: $\Delta t \to 0 \therefore f(t) \to \infty$

Para $F^* = 1$: impulso unitário representado pela função $\delta(t)$

1.2. Resposta a um impulso

Impulso aplicado no instante $t=0$: $F^* \delta(t)$

Eq. movimento :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F^* \delta(t)$$

Condições iniciais:

$$x(t=0) = x_0 = 0$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = \frac{F^*}{m}$$

RESPOSTA EM REGIME LIVRE ou NATURAL DE UM SISTEMA SUB-AMORTECIDO

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[x_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \sin\omega_d t\right]$$

Introduzindo as condições iniciais:

$$x(t) = F^* \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_d t$$ → RESPOSTA AO IMPULSO $F^* \delta(t)$

× Impulso unitário $\delta(t)$ ($F^*=1$) : Resposta $x(t)=h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_d t$$

↳ FUNÇÃO DE RESPOSTA IMPULSIVA $h(t)$

× Impulso $F^*\delta(t-\tau)$ aplicado num instante $t=\tau$ ∴ variação de velocidade $\frac{F^*}{m}$ em $t=\tau$

Para $x(0<t<\tau)=0$ ∴

$$x(t) = F^* h(t-\tau)$$

1.2.1. FUNÇÃO DE RESPOSTA IMPULSIVA

× $h(t-\tau)$: Resposta a um impulso unitário $\delta(t-\tau)$: ($F^*=1$)

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)$$

↳ FUNÇÃO DE RESPOSTA IMPULSIVA $h(t-\tau)$

1.3. RESPOSTA A UMA SOLICITAÇÃO TRANSIENTE

1.3.1. INTEGRAL DE DUHAMEL

Uma solicitação transiente pode ser ~~associada~~ assimilada a uma série de forças impulsivas $f(\tau)$ actuando durante intervalos de tempo $d\tau$.

Os impulsos têm grandeza $F^* = f(\tau)d\tau$ e actuam no instante τ.

Resposta impulsiva incremental $dx(t)$ para $t>\tau$:

$$dx(t) = f(\tau)d\tau h(t-\tau)$$

- $(t-\tau)$: argumento da função de resposta impulsiva e representa o tempo decorrido desde a aplicação do impulso até ao instante t.

Resposta no instante t:

soma das respostas de cada um dos impulsos

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

→ Integral de Duhamel

↓ traduz a aplicação do princípio da sobreposição de efeitos.

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\xi\omega_n (t-\tau)} \sin\omega_d (t-\tau)\, d\tau$$

↳ Representa a resposta a uma solicitação qualquer genérica $f(\tau)$

↳ não tem em conta as condições iniciais e apenas representa a resposta forçada (solução particular da eq. do movimento)

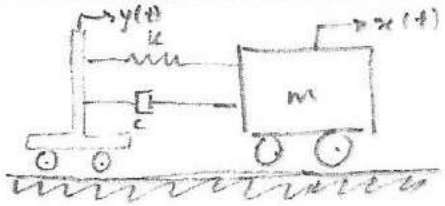
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[x_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \sin\omega_d t\right] + \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t f(\tau)\, e^{-\xi\omega_n (t-\tau)} \sin\omega_d (t-\tau)\, d\tau$$

↳ Resposta total

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

onde x_0 e $\dot{x}_0$ representam as condições iniciais do deslocamento e velocidade respetivamente.

MOVIMENTO TRANSIENTE DA BASE



- $y(t)$: deslocamento da base
- $x(t)$: o deslocamento da mama m a partir da sua posição de equilíbrio
- $z(t) = x(t) - y(t)$: deslocamento da massa em relação à base

× MOVIMENTO ABSOLUTO:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = ky(t) + c\dot{y}(t)$$

1.4. Exemplo - Resposta à função degrau $F_0 \mu(t)$

$f(t) = F_0 \mu(t)$ onde $\mu(t)$ representa a função degrau

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d} \int_0^t e^{-\frac{\xi}{m}(t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) d\tau$$

↳ Resposta

1.5. Integração numérica da equação do movimento.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad \begin{matrix} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{matrix}$$

Em certas aplicações práticas, a função de solicitação $f(t)$ não está disponível sob a forma de expressão analítica.

1.5.1. MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

- aproximação das derivadas $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ da função $x(t)$ (solução) em termos do deslocamento $x(t)$.
- equação diferencial do movimento ⇒ equação de diferenças finitas

B- SISTEMA DISCRETO COM 2 GRAUS DE LIBERDADE.

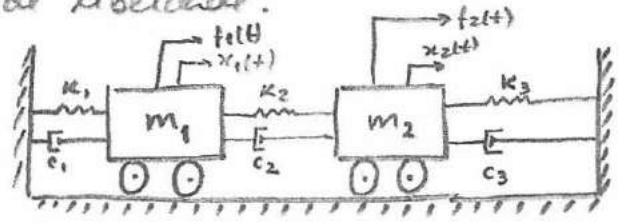
↓

sistemas que necessitam de duas coordenadas independentes para descrever o movimento.

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO:

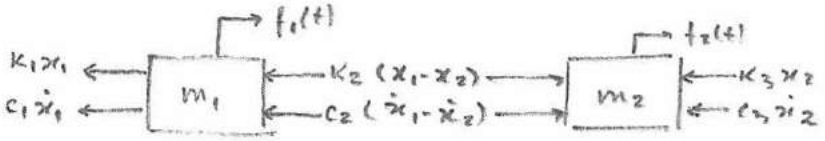
1. EQ. DO MOVIMENTO

Existem duas equações do movimento, uma para cada grau de liberdade.



O movimento do sistema é descrito por duas coordenadas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ que definem as posições das massas m_1 e m_2, em qualquer instante t, a partir das respetivas posições de equilíbrio estático.

- DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DAS MASSAS m_1 E m_2:



Aplicação da 2ª Lei de Newton do movimento:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - K_1x_1 + K_2(x_2 - x_1) + f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = -c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_3\dot{x}_2 - K_2(x_2 - x_1) - K_3x_2 + f_2 \end{cases}$$

Após o manuseio dos termos:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2 = f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - K_2x_1 + (K_2 + K_3)x_2 = f_2 \end{cases}$$

O movimento da massa m_1 influencia o movimento da massa m_2 e vice-versa.

- NOTAÇÃO MATRICIAL

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}}$$

$[m]$, $[c]$ e $[K]$ são simétricas, de dimensão (7×7)

$$[m] = [m]^T \; ; \; [c] = [c]^T \; , \; [K] = [K]^T$$

$[m]$ — matriz de massa

$[c]$ — " " amortecimento

$[K]$ — " " rigidez

$\{\ddot{x}(t)\}$ — (vector de aceleração)

$\{x(t)\}$ — " " deslocamento

$\{\dot{x}(t)\}$ " " velocidade

$\{f(t)\}$ " " força

→ **EQUAÇÕES DE LAGRANGE** (úteis quando o nº de graus de liberdade é elevado)

↳ exprimem o equilíbrio dinâmico de um sistema em termos das coordenadas generalizadas (deslocamentos lineares ou angulares), da energia cinética total do sistema e da variação de energia potencial do sistema relativamente à energia potencial na posição de equilíbrio estático.

Para um sistema com n graus de liberdade:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \overline{Q}_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$\overline{Q}_i = Q_i^* + Q_i$ → componente não-conservativa

Q_i^* ↓ componente conservativa

Força generalizada

$\overline{Q}_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i$ Substituindo: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$

Como a energia potencial V, não é uma função das velocidades generalizadas $\dot{q}_i$, as eq. de lagrange ficam:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \overline{Q}_i} \qquad \text{onde} \quad L = T - V \rightarrow \text{função lagrangiana}$$

→ FUNÇÃO DE DISSIPAÇÃO DE RAYLEIGH

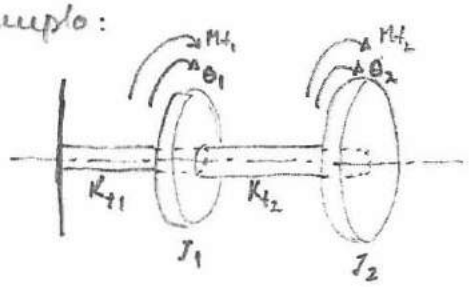
Amortecimento viscoso: as forças de amortecimento são proporcionais às velocidades generalizadas.

$$\boxed{Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Q_i = forças exteriores directamente aplicadas

Exemplo:



- Coordenadas generalizadas

$$q_1 = \theta_1 \; ; \; q_2 = \theta_2$$

- Energia cinética

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$$

- Energia potencial

$$V_i = \int_0^{\theta} K_{t_i}\, \theta \, d\theta = \frac{1}{2} K_{t_i}\, \theta^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_{t_1} \theta_1^2 + \frac{1}{2} K_{t_2} (\theta_2 - \theta_1)^2$$

- Forças não conservativas

$$Q_i = \sum_{K=1}^{3} M_{t_K} \frac{\partial \theta_K}{\partial q_i} = \sum_{K=1}^{3} M_{t_K} \frac{\partial \theta_K}{\partial \theta_i}$$

$$Q_1 = Mt_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_1} + Mt_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} = Mt_1$$

$$Q_2 = Mt_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_2} + Mt_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_2} = Mt_2$$

- Eq. Lagrange

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + (Kt_1 + Kt_2)\theta_1 - Kt_2 \theta_2 = Mt_1$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 - Kt_2 \theta_1 + (Kt_2 + Kt_3)\theta_2 = Mt_2$$

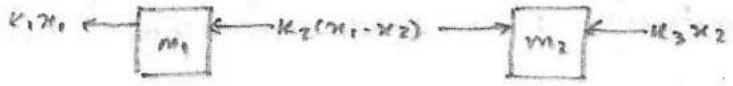
$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Kt_1 + Kt_2 & -Kt_2 \\ -Kt_2 & Kt_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Mt_1 \\ Mt_2 \end{Bmatrix}$$

1. REGIME LIVRE

• REGIME LIVRE DO SISTEMA NÃO-AMORTECIDO

$$f_1(t) = f_2(t) = 0$$

• DIAG. CORPO LIVRE:



$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + [K] \{x(t)\} = \{0\} \quad \wedge \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}$$

HIPÓTESE:

As massas m_1 e m_2 efectuam um movimento harmónico à mesma frequência ω, movimento síncrono, e mesmo $\not$ de fase ϕ.

As soluções são da forma:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$$

u_1 e u_2 representam as amplitudes de $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

$$\{x(t)\} = \{u\} \cos(\omega t - \phi)$$

Substituindo vem:

$$\left[-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[-\omega^2 [m] - [K]] \{u\} \cos(\omega t - \phi) = \{0\}}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[[K] - \omega^2 [m]] \{u\} = \{0\}}$$

O sistema homogéneo é verificado pela solução trivial $u_1 = u_2 = 0$ q corresponde à posição de equilíbrio estático do sistema.

Para a existência de soluções não triviais para u_1 e u_2, o determinante dos coeficientes tem de ser nulo, i.e:

$$\Delta(\omega) = \left| \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\boxed{\Delta(\omega) = |[K] - \omega^2 [m]| = 0}$$ determinante característico

Equação característica ou de frequências : eq. quadrática em ω^2 cujas raízes ω_1 e ω_2 são as frequências ou valores característicos

- O sistema possui 2 soluções não triviais da forma $\{x(t)\} = \{u\} \cos(\omega t - \phi)$
- existem 2 modos para os quais o mov. síncrono é possível, um caracterizado pela frequência ω_1 e o outro por ω_2.

$$\omega_1^2 \rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix} \qquad \omega_2^2 \rightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}$$

Introduzindo no sist. homogéneo:

$$\omega^2 = \omega_1^2 \mapsto \{u\}_1 \quad \text{e} \quad \omega^2 = \omega_2^2 \mapsto \{u\}_2$$

Sistema homogéneo ∴ apenas as razões $r_1 = \frac{u_{21}}{u_{11}}$ e $r_2 = \frac{u_{22}}{u_{12}}$ são únicas

$$\omega_1^2 \therefore \quad r_1 = \frac{u_{21}}{u_{11}} = -\frac{k_{11} - \omega_1^2 m_1}{k_{12}} = -\frac{k_{12}}{k_{22} - \omega_1^2 m_2}$$

$$\omega_2^2 \therefore \quad r_2 = -\frac{k_{12}}{k_{22} - \omega_2^2 m_2}$$

- Modos naturais de vibração

↓

são movimentos síncronos do sistema :

$$\{x(t)\}_1 = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) \qquad \{x(t)\}_2 = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

$\{u\}_1$ $\qquad$ $\{u\}_2$

ω_1 e ω_2 → frequências naturais

$\{u\}_1$ e $\{u\}_2$ → formas naturais (soluções do sist. homogéneo)

→ modos naturais

Os modos naturais constituem uma propriedade intrínseca do sistema e são únicos para um dado sistema, excepto a grandeza das componentes dos vectores modais. Uma forma modal é única embora as amplitudes não o sejam.

Normalização: transforma um vector modal único sem que a forma natural seja alterada, pois que todas as componentes são definidas em proporção.

- RESPOSTA LIVRE OU NATURAL

↓

resulta da sobreposição dos dois modos naturais de vibração multiplicados cada um por uma constante que representa o grau de participação do modo na expressão do movimento:

$$x(t) = C_1 \{x(t)\}_1 + C_2 \{x(t)\}_2$$

$$= \dots [u]\{q(t)\}$$

matriz modal

$$\begin{cases} C_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \end{cases}$$ → funções do tempo para cada grau de liberdade.

$$[u] = [\{u\}_1 \quad \{u\}_2] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

- Para condições iniciais gerais, ambos os modos naturais são excitados
- O movimento é uma sobreposição dos dois modos naturais de vibração.

C_1, C_2 e ϕ_1 e ϕ são constantes q se determinam através das cond. q iniciais:

$$x_1(t=0) = x_{10} \qquad x_2(t=0) = x_{20}$$

$$\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_{10} \qquad \dot{x}_2(t=0) = \dot{x}_{20}$$

• ORTOGONALIDADE

Sist. homogéneo das soluções naturais:

$$[[K] - \omega^2 [m]]\{u\} = \{0\}$$

Soluções: $\omega_1 < \omega_2$

Dois modos naturais distintos $(\omega_1, \{u\}_1)$ e $(\omega_2, \{u\}_2)$ verificam a condição homogénea:

$$[K]\{u\}_1 = \omega_1^2 [m]\{u\}_1 \quad (*) \qquad [K]\{u\}_2 = \omega_2^2 [m]\{u\}_2 \quad (*)$$

(*) $\{u\}_2^T$ e $\{u\}_1^T$

$$\{u\}_2^T [K]\{u\}_1 = \omega_1^2 \{u\}_2^T [m]\{u\}_1 \ (a) \qquad \{u\}_1^T [K]\{u\}_2 = \omega_2^2 \{u\}_1^T [m]\{u\}_2 \ (b)$$

$$\{u\}_2^T [K]\{u\}_1 = \omega_2^2 \{u\}_2^T [m]\{u\}_1 \quad (c)$$

(a) - (c) $\qquad 0 = (\omega_2^2 - \omega_1^2)\{u\}_2^T [m]\{u\}_1$

$$\{u\}_2^T [m]\{u_1\} = 0 \qquad \{u\}_1^T [m]\{u\}_2 = 0$$

→ Os vectores modais $\{u\}_i$ são ortogonais em relação à matriz de massa $[m]$

De (a) e (b): $\qquad \{u\}_2^T [K]\{u\}_1 = 0 \qquad \{u\}_1^T [K]\{u\}_2 = 0$

→ Os vectores modais $\{u\}_i$ são ortogonais à matriz de rigidez $[K]$

- **TEOREMA DA EXPANSÃO**

Os vectores modais $\{u\}_i$ constituem um conjunto de vectores linearmente independentes pelo que qualquer vector de dimensão $n=2$, pode exprimir-se como uma combinação linear destes vectores.

Fisicamente, qualquer movimento $\{x(t)\} = \{v\}$ do sistema pode ser assimilado à sobreposição dos dois modos naturais de vibração multiplicados por constantes apropriadas que constituem uma medida do grau de participação de cada modo no movimento do sistema.

$$\{v\} = c_1\{u\}_1 + c_2\{u\}_2$$

As componentes c_i, $i=1,2$. do vector $\{v\}$ na base dos vectores modais podem determinar-se premultiplicando sucessivamente ambos os membros por $\{u\}_i^T [m]$ e tendo em conta as propriedades de ortonormalidade

$$c_i = \{u\}_i^T [m] \{v\}$$

NOTA: Quando uma das soluções da ef. característica é nula, ou seja, quando uma das frequências naturais é nula, significa que não existe oscilação das massas m_1 e m_2 no movimento associado a essa raiz. Um modo do sistema é associado a um movimento de corpo rígido.

⇓

Sistemas com ligações ao exterior não restringidas

⇓

SIST. SEMI-DEFINIDO

⇓

O movimento do sistema, é uma combinação de modos de corpo rígido e modos elásticos. Tem uma matriz de rigidez $[K]$ singular. O 1º modo natural, sendo uma solução do problema característico, é ainda ortogonal ao 2º modo natural de vibração

• QUOCIENTE DE RAYLEIGH $R(\{v\})$

Os modos naturais de vibração são dados pelas soluções do problema característico $[K]\{u\} = \omega^2[m]\{u\}$

$$R(\{v\}) = \frac{\{v\}^T[K]\{v\}}{\{v\}^T[m]\{v\}}$$

↓

quantidade escalar cujo valor depende das matrizes $[m]$ e $[K]$ e do vector arbitrário $\{v\}$

- Se $\{v\}$ coincide com um dos vectores próprios (forma natural) do sistema, então $R(\{v\})$ reduz-se ao valor próprio (frequência natural) associado
- $R(\{v\})$ tem valores estacionários na vizinhança dos vectores próprios do sistema.
- $R(\{v\})$ nunca é menor que a frequência fundamental

- Aplicação prática de $R(\{v\})$ → obtenção de estimativas para a frequência fundamental do sistema a partir de vectores arbitrários

2. REGIME FORÇADO

- Eq. movimento

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

- RESPOSTA A UMA SOLICITAÇÃO HARMÓNICA

Eq. movimento

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t}$$

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{F\} e^{j\omega t}$$

RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE OU ESTACIONÁRIO

$$\{x(t)\} = \{X(\omega)\} e^{j\omega t}$$

↳ vector de componentes, em geral complexas, que dependem da frequência ω de excitação e dos parâmetros do sistema.

Introduzindo a resposta estacionária:

$$[-\omega^2[m] + j\omega[c] + [k]]\{X(\omega)\} = \{F\}$$

$$\wedge \quad Z_{rs}(\omega) = -\omega^2 m_{rs} + j\omega c_{rs} + k_{rs} \qquad r,s = 1,2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

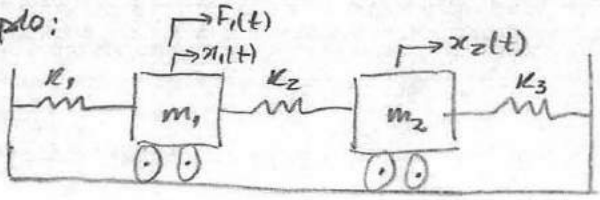
$$[Z(\omega)]\{X(\omega)\} = \{F\}$$

A solução vem: amplitude das massas m_1 e m_2

$$X_1(\omega) = \frac{Z_{22}F_1 - Z_{12}F_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \qquad X_2(\omega) = \frac{Z_{11}F_2 - Z_{12}F_1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

NOTA: O denominador destas expressões de $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$ é a equação característica ou de frequência do sistema

Exemplo:



REG. ESTACIONÁRIO NÃO AMORTECIDO

com $f_1(t) = F_1 \cos \omega t$

$f_2(t) = 0$

sist. com 2 graus de liberdade

$m_1 = m$ e $m_2 = 2m$

$k_1 = k_2 = k$ e $k_3 = 2k$

funções de impedância $Z_{rs}(\omega)$:

$$Z_{11}(\omega) = k_{11} - \omega^2 m_1 \qquad Z_{22}(\omega) = k_{22} - \omega^2 m_2 \qquad Z_{12}(\omega) = k_{12}$$

Amplitude das massas m_1 e m_2:

$$X_1(\omega) = \frac{(k_{22} - \omega^2 m_2) F_1}{(k_{11} - \omega^2 m_1)(k_{22} - \omega^2 m_2) - (k_{12})^2}$$

$$X_2(\omega) = \frac{-k_{12} F_1}{(k_{11} - \omega^2 m_1)(k_{22} - \omega^2 m_2) - (k_{12})^2}$$

- As amplitudes $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$ tendem para o infinito para uma frequência de excitação $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$
- Existem duas condições de ressonância para o sistema: $\omega = \omega_1$ e $\omega = \omega_2$
- Existe um valor particular da frequência ω para o qual a amplitude de vibração da massa m_1, à qual está aplicada a força excitadora $F_1(t)$, se anula

- RESPOSTA estacionária

$$x_1(t) = X_1(\omega) \cos \omega t \qquad x_2(t) = Y_2(\omega) \cos \omega t$$

2.1. REGIME FORÇADO NÃO AMORTECIDO - Análise modal

• Coordenadas generalizadas

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

• Coordenadas naturais ou modais $\eta_i(t)$

$$\{x(t)\} = [u]\{\eta(t)\}$$
$$\{\ddot{x}(t)\} = [u]\{\ddot{\eta}(t)\}$$

$[u]_{2\times 2}$: matriz de transformação : matriz modal

Substituindo em (1)

$$[m][u]\{\ddot{\eta}(t)\} + [k][u]\{\eta(t)\} = \{f(t)\}$$

$(\times [u]^T)$ $\quad [u]^T[m][u]\{\ddot{\eta}(t)\} + [u]^T[k][u]\{\eta(t)\} = [u]^T\{f(t)\}$

(Propriedade de ortonormalidade ∴ desacoplamento das equações)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta(t) = N_i(t)} \quad : 2 \text{ equações diferenciais independentes}$$

As coordenadas $\eta_i(t)$ para as quais as eq. do movimento são independentes designam-se por COORDENADAS NATURAIS OU MODAIS

• Condições iniciais

$\{\eta(0)\}$ e $\{\dot{\eta}(0)\}$ na base modal

$$\{x(0)\} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} \qquad \{\dot{x}(0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{Bmatrix}$$

$$\{x(0)\} = [u]\{\eta(0)\} \qquad \{\dot{x}(0)\} = [u]\{\dot{\eta}(0)\}$$

$[u]^T[m]\{x(0)\} = [u]^T[m][u]\{\eta(0)\}$ → deslocamentos iniciais na base modal

$[u]^T[m]\{\dot{x}(0)\} = \{\dot{\eta}(0)\}$ → velocidades iniciais na base modal

- RESPOSTAS NAS COORDENADAS MODAIS $\eta_i(t)$

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t N_i(\tau) \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau + \eta_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{\eta}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t$$

- RESPOSTA NAS COORDENADAS GENERALIZADAS $x_i(t)$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix} \eta_1(t) + \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix} \eta_2(t)$$

O movimento $\{x(t)\}$ pode, pois, exprimir-se como uma sobreposição dos modos naturais de vibração multiplicados pelas respectivas coordenadas modais: SOBREPOSIÇÃO MODAL

→ 3. REGIME FORÇADO AMORTECIDO – Análise Modal

- Coordenadas generalizadas

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

- Coordenadas modais ou naturais

$$[u]^T[m][u]\{\ddot{\eta}(t)\} + [u]^T[c][u]\{\dot{\eta}(t)\} + [u]^T[k][u]\{\eta(t)\} = [u]^T\{f(t)\}$$

Eq. do movimento na base modal:

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [u]^T[c][u]\{\dot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = \{N(t)\}$$

- Amortecimento proporcional

Matriz de amortecimento

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k]$$

$$[u]^T[c][u] = \alpha[u]^T[m][u] + \beta[u]^T[k][u]$$

$$= \alpha[I] + \beta[\Omega^2] = [\alpha + \beta\Omega^2] = [2\xi\Omega]$$

- Equações modais

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}(t) + \omega_i^2\eta(t) = N_i(t), \quad i = 1, 2.$$

CONTROLO DE VIBRAÇÕES

1. ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES

Transmissão activa → Redução da grandeza de forças transmitidas a partir de componentes móveis da máquina para a base de suporte.

$TR = \frac{F_T}{F}$

Transmissão passiva → Redução da amplitude do movimento transmitido pela base de apoio ao equipamento.

$TR = \frac{X}{Y}$

$$TR = \frac{F_T}{P} = \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

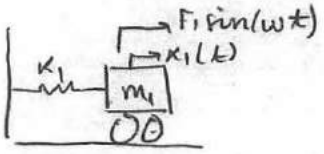
- Isolamento de vibrações : $TR < 1 \therefore \beta = \frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$
- Para $\omega \Rightarrow \omega_n < \frac{\omega}{\sqrt{2}} \therefore K$
- $\beta \uparrow TR \downarrow \therefore K \downarrow TR \downarrow$
- $\beta \geq 3 \therefore$ TR independente de $\xi \leq 0.2 (20\%)$
- ξ : atenuação da passagem pela ressonância de amplitude

$$TR = \frac{1}{\beta^2 - 1}$$

δ_s: Deflexão provocada pelo peso próprio do equipamento no sistema isolador.

- Uma frequência natural ω_n baixa do isolador favorece o isolamento, K elevado.
- Para ω baixa, um valor de K elevado provoca um δ_s elevado que pode tornar o isolamento impraticável.

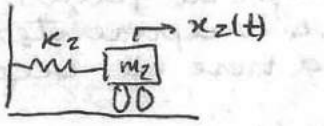
2. ABSORSOR DE VIBRAÇÕES



Para $\omega \cong \omega_n \Rightarrow X_1(\omega) \uparrow$

vibração violente

Sist. secundário



↳ este sistema vai formar com o sistema principal (1) um sistema c/ 2 graus de liberdade c/ resposta em frequência nula à frequência de excitação que constitui uma solução para absorver vibrações.

$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ → frequência

↓

frequência natural do sistema principal

$\omega_s = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ → freq. natural do sist. secundário

$\alpha = \frac{\omega_s}{\omega_n}$ → razão das freq. naturais

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$ → razão de freq.

$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$ → " " massas

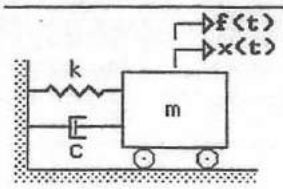
$X_s = \frac{F_1}{k_2}$ → deslocamento estático

Para anular completamente a vibração da massa principal m_1 $\therefore X_1 = 0$

$\alpha^2 - \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \frac{\omega_s}{\omega_n} = \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \omega = \omega_s = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$

Para $\omega = \omega_n$ e para $X_1(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_n = \omega_s \Rightarrow \alpha = 1$

- Para $\alpha = 1$ o sist. secundário está sintonizado para a freq. de excitação ω.

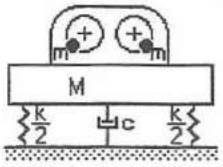


1) O comportamento vibratório do sistema com um grau de liberdade representado na figura é descrito pela equação: $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$.

a) Estabelecer a equação característica ou de frequência.

b) Discutir, em função do valor da razão de amortecimento ξ, a natureza das raízes da equação característica e o tipo de movimento do sistema.

c) Indicar duas técnicas para calcular o regime forçado x(t) do sistema quando este é sujeito a uma excitação f(t) não-periódica. Em que condições específicas se utiliza cada uma delas e em que pressupostos se baseiam?



2) O equipamento representado na figura possui dois componentes que rodam em sentidos contrários com uma velocidade angular ω constante, e cujos centros de massa distam de e do seu centro de rotação. O sistema possui uma razão de amortecimento viscoso $\xi \cong 10\%$.

a) Caracterizar a excitação e o movimento vibratório do equipamento.

b) Representar o factor de amplificação dinâmica μ e o ângulo de fase ϕ em função da razão de frequência $\beta=\omega/\omega_n$. Indicar na figura o lugar geométrico dos valores correspondentes às frequências natural e de ressonância.

c) Representar a amplitude da força $f_T(t)$ transmitida ao apoios em função da razão de frequência $\beta=\omega/\omega_n$. Indicar na figura eventuais pontos notáveis.

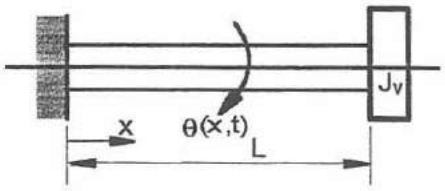
d) Discutir a eficiência do isolamento em função dos parâmetros M, k e c para uma determinada frequência de funcionamento.

3) A um sistema vibratório com um grau de liberdade e frequência natural igual a 23.5 rad/s é aplicada uma solicitação periódica f(t) que representada por uma série de Fourier apresenta um harmónico fundamental de frequência igual a 8 rad/s. Em regime permanente ou estacionário, representar graficamente,

a) o espectro de amplitude da solicitação f(t);

b) o espectro de amplitude da resposta x(t);

c) a evolução no tempo dos 3 primeiros harmónicos da resposta x(t).



4) Na figura representa-se um veio em torção, de comprimento L, com uma extremidade fixa e com um volante indeformável na outra extremidade. A secção recta do veio apresenta área A e momento polar de 2ª ordem I_p. O material possui módulos de elastidade longitudinal e transversal, respectivamente, E e G, e ainda uma massa específica ρ. O volante possui um momento polar de inércia J_v.

a) Estabelecer a equação de vibração de torção.

b) Estabelecer as condições de fronteira.

c) Indicar os requisitos a satisfazer pelas funções $\theta_r(x)$, r=1,2,..., representativas das formas naturais de vibração do sistema e por uma função aplicável no método da energia de Rayleigh.

d) A partir da equação característica $-\frac{d}{dx}\left(GI_p(x)\frac{d\theta(x)}{dx}\right) = \omega^2\rho I_p(x)\theta(x)$ estabelecer as propriedades de ortogonalidade (em relação à massa e à rigidez) associadas às formas naturais de vibração de torção $\theta_r(x)$, r=1,2,..., do veio representado.